1 Grundlegendes

Potenzen

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Wurzeln (a,b ≥ 0)

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m\cdot n]{a^{m+n}}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Logarithmen (u,v,a,b > 0)

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$
$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$
$$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$$
$$\log_a u^r = r \log_a u$$
$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (3)$$

Mitternachtsformel

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \quad (5)$$

Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad (6)$$

2 Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

$$s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + ... + s_n\vec{u}_n = \vec{0} \quad (7)$$
$$\Longleftrightarrow \text{ für alle i gilt: } s_i = 0$$

Vektor aus Punkten

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} \quad (10)$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 ...} \quad (11)$$

Einheitsvektoren der Länge 1
(Betrag!)

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{für } |\vec{a}| > 0 \quad (8)$$

Polarkoordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot |\vec{a}| \quad (12)$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot |\vec{a}| \quad (13)$$
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \cdots$$

Vektor der Länge $\lambda = |\vec{a}| > 0$
(Betrag!)

$$\vec{a} = \lambda \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \frac{\lambda}{|\vec{a}|} \quad (9)$$

Skalarprodukt (ein Euklidisches ~)

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (14)$$

Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (15)$$

Senkrechte Projektion

$$\vec{a}_{||} = \vec{b} \cdot \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (16)$$
$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||} \quad (17)$$

Länge von Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (18)$$
$$= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \quad (18')$$

Geradendarstellung

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r} \qquad (19)$$

$$\vec{r} \times (\vec{x} - \vec{p}) = \vec{0} \qquad (20)$$

Ebenendarstellung

$$\vec{x} = \vec{p} + t_1 \cdot \vec{r} + t_2 \cdot \vec{s} \qquad (21)$$

$$(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n} = 0 \qquad (22)$$

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = e \qquad (23)$$

Kugeldarstellung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2 \qquad (24)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{x}|^2 - 2\vec{m} \bullet \vec{x} + \vec{m} \bullet \vec{m} = r^2 \qquad (24')$$

Hessesche Normalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n}_0 = 0$ (22')

$$\Rightarrow d(X, E) = |(X - P) \cdot \vec{n}_0| \qquad (25)$$

$$= \left| \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| \qquad (26)$$

Winkelberechnung

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (27)$$

$$\sin\alpha = \frac{det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (28)$$

Winkel zwischen Geraden, Ebenen

$$\delta(E_1, E_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) \qquad (29)$$

$$\delta(E, g) = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}\right) \qquad (30)$$

$$\delta(g_1, g_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}\right) \qquad (3[illegible])$$

Abstände

Gerade-Punkt $(P \in g)$

$$d(Q, g) = \frac{|\vec{r} \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{r}|}$$

Ebene-Punkt $(P \in E(\text{bene}))$

$$d(Q, E) = \frac{|\vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{n}|}$$

Windschiefe Geraden $(P_i \in g_i)$

$$d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \bullet (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

Spiegelung Allgemein

$$\vec{P}' = \vec{P} + 2\overrightarrow{PS} \qquad (\ldots \text{ an } S) \qquad (32)$$

Spatprodukt

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ (3reihige Determinante)

Spatvolumen

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \bullet \vec{b}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \bullet \vec{a}| \qquad (33)$$

Cramer Regel (in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$)

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot x_1 + \vec{b} \cdot x_2 + \vec{c} \cdot x_3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{d}\;\vec{b}\;\vec{c}] \\ [\vec{a}\;\vec{d}\;\vec{c}] \\ [\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{d}] \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]} \qquad (34)$$

nur für $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \neq 0$ gültig !
($\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ linear unabhängig !)

3 Matrizen

Falkschema

·	B
A	A · B
C	C·A·B

Multiplikation von Matrizen

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{m\times q} \quad (35)$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (36)$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (37)$$

Rechenregeln

$$A \cdot A = A^2 \quad (38)$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (39)$$

$$(A^T)^T = A \quad (40)$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (41)$$

Inverse Matrizen
2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ regulär} \iff A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ existiert} \quad (42)$$

3x3 mit $A = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ regulär bzw. invertierbar

$$\iff A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} [\vec{e}_1 \vec{b} \vec{c}] & [\vec{e}_2 \vec{b} \vec{c}] & [\vec{e}_3 \vec{b} \vec{c}] \\ [\vec{a} \vec{e}_1 \vec{c}] & [\vec{a} \vec{e}_2 \vec{c}] & [\vec{a} \vec{e}_3 \vec{c}] \\ [\vec{a} \vec{b} \vec{e}_1] & [\vec{a} \vec{b} \vec{e}_2] & [\vec{a} \vec{b} \vec{e}_3] \end{pmatrix} \quad (43)$$

4 determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad (44)$$

3x3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2 \quad (45)$$

$$= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot a_3 - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot b_3 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot c_3 \quad (45')$$

oder nach Skript rekursiv allgemein:

$$\det(a_{11}) := a_{11} \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot \det(a_{21})}_{\substack{\text{algebraisches Komplement} \\ \text{zu } a_{12}\text{, kurz } A_{12} \\ \text{(nur ein Name!)}}} \cdot a_{12} + (-1)^{2+2} \cdot \det(a_{11}) \cdot a_{22} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\wedge \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{(-1)^{i+3} \cdot \det(S_{i3})}_{\substack{\text{kann man auch} \\ A_{i3} \text{ nennen!}}} \cdot a_{i3} \overset{!}{=} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Spatprodukt}}$$

mit S_{ik} = Matrix A ohne i. Zeile und ohne k. Spalte. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ analog:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{in} \cdot a_{in}}_{\substack{\text{nach } n\text{. Spalte} \\ \text{entwickelt}}} \overset{!}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \cdot a_{ik}}_{\substack{\text{nach } k\text{. Spalte} \\ (1 \le k \le n)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{li} \cdot a_{li}}_{\substack{\text{nach } l\text{. Zeile} \\ (1 \le l \le n)}}$$

Determinantenregeln $(\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, r \in \mathbb{R})$

$$det(\underline{A}\cdot\underline{B}) = det(\underline{A})\cdot det(\underline{B}) \quad (46)$$
$$det(\underline{A}^{-1}) = (det(\underline{A}))^{-1} \quad (47)$$
$$det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T) \quad (48)$$
$$det(r\underline{A}) = r^n\, det(\underline{A}) \quad (49)$$
$$det(\underline{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{A} \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \underline{A}^{-1} \text{ existiert} \Leftrightarrow \underline{A} \text{ ist invertierbar} \quad ! \quad \underline{(50)}$$

5 Lineare Transformation

... ist eine Funktion $f \subseteq \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_y$ mit Vektorräumen $(\mathcal{V}_x, +, \cdot)$, $(\mathcal{V}_y, +, \cdot)$ und Linearität

$$\boxed{f(\vec{u}+\vec{v}\cdot s) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})\cdot s} \quad \underline{(51)}$$

... bei $\mathcal{V}_x = \mathbb{R}^{m\times 1}, \mathcal{V}_y = \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\Longleftrightarrow f(\vec{x}) = [f]\cdot\vec{x} \text{ mit } [f] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

LOT - Lineare Orthogonale Transformation (Spezialfall $m=n$, $[f] = \underline{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$\boxed{\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \underline{E} = \mathbb{1}_n}$, d.h. $\underline{M}^T = \underline{M}^{-1}$, für $\underline{M} = [f] \overset{\text{z.B.}}{=} (\vec{a}_1|\vec{a}_2|\vec{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\vec{a}_1\bullet\vec{a}_2 = 0 \quad (52) \qquad |\vec{a}_1| = 1 \quad (55) \qquad |det(\underline{M})| = 1 \quad (58)$$
$$\vec{a}_1\bullet\vec{a}_3 = 0 \quad (53) \qquad |\vec{a}_2| = 1 \quad (56) \qquad \boxed{\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \underline{E}} \quad \underline{(59)} \text{ (reicht !)}$$
$$\vec{a}_2\bullet\vec{a}_3 = 0 \quad (54) \qquad |\vec{a}_3| = 1 \quad (57) \qquad \underline{M}^T = \underline{M}^{-1} \quad (60)$$

Spiegelung: An der Ebene mit σ und Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$

$$\underline{(61)} \quad \boxed{f(\vec{x}) = (\underline{E} - 2\vec{n}_0\cdot\vec{n}_0^T)\cdot\vec{x}}$$

$\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \mathbb{1}_3 \Longleftrightarrow$ LOT (!)

$det(\underline{M}) = 1 \rightarrow$ Drehung

$det(\underline{M}) = -1 \rightarrow$ Spiegelung

Drehung: mit Orientierung $\vec{a}_0$ und Winkel $\alpha \in [0;\pi]$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= (\vec{a}_0\cdot\vec{a}_0^T + \cos(\alpha)(\underline{E} - \vec{a}_0\cdot\vec{a}_0^T) + \sin(\alpha)\vec{a}_0\times)\vec{x} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{s}\bullet f(\vec{s})}{|\vec{s}||\vec{s}|}\right) \text{ mit: } \vec{s}\perp\vec{a}_0 \\ \vec{a}_0 &= \vec{s}\times f(\vec{s})\cdot|\vec{s}\times f(\vec{s})|^{-1} \end{aligned}} \quad \underline{(62)}$$

Drehung um die Achsen (x-, y-, z-Achse): $\varphi \lesseqgtr 0°$ linkshändig / rechtshändig

$$\underline{D}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}; \underline{D}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}; \underline{D}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Funktionen

Newtonsches Tangenten Verfahren (Nullstellennäherung: $x_n \longrightarrow$ Nst. $(n\to\infty)$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (63)$$

Newton Interpolation (mit Stützstellen x_i einer Tabelle)

$$g(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + \ldots + c_{n-1}(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1) \quad (64)$$

Taylorentwicklung ... einer ganzrationalen Funktion g (maximal) n. Grades um $A(a|g(a))$: (z.B. per Horner Schema !)

$$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n \quad (65)$$

Exponentielle Änderung

$$f(t) = a\cdot e^{kt}$$
$$f'(t) = k\cdot f(t)$$

Beschränkte Änderung

$$f(t) = S - (S-a)\cdot e^{-kt}$$
$$f'(t) = k\cdot(S - f(t))$$

Logistische Änderung

$$f(t) = \frac{aS}{a + (S-a)\cdot e^{-Skt}}$$
$$f'(t) = k\cdot f(t)\cdot(S - f(t))$$

mit Halbwertszeit $T_{1/2}$:

$$k = -\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} < 0 \quad \text{(exp. Zerfall)}$$

mit Verdopplungszeit T_2: $k = \frac{\ln(2)}{T_2} > 0$ (exp. Wachstum)