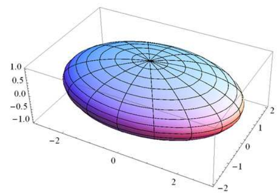
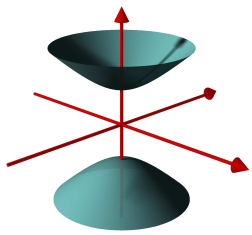
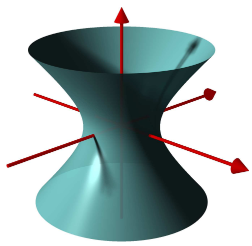
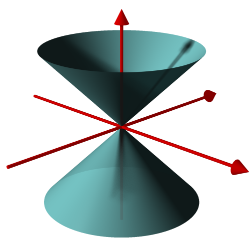
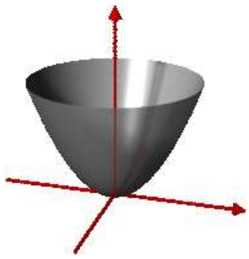
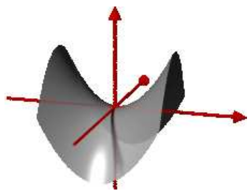
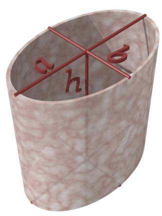
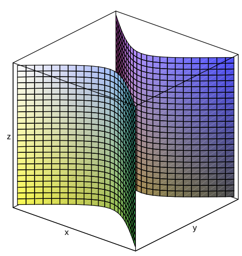
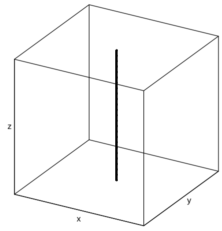
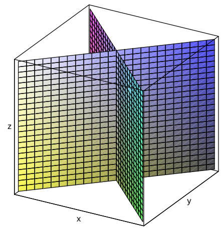
Die Normalform der Quadriken im $\mathbb{R}^3$ (17 Fälle) $(a, b, c, p \neq 0)$:

- Rang(A) $= 3$ (alle Eigenwerte von A ungleich 0)

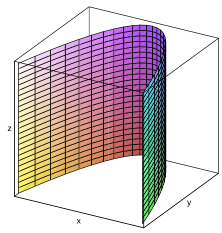
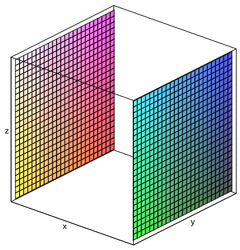
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Ellipsoid (evtl. Kugel)	
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge	$\{\,\}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt	.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kegel	

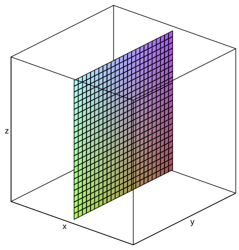
- $\mathrm{Rang}(A) \;=\; 2$ (ein Eigenwert von A gleich 0)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2p\,z \;=\; 0$	elliptisches Paraboloid	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-2p\,z \;=\; 0$	hyperbolisches Paraboloid	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1 \;=\; 0$	leere Menge	$\{\,\}$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 \;=\; 0$	elliptischer Zylinder	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+1 \;=\; 0$	hyperbolischer Zylinder	

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	z-Achse	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Ebenenpaar mit Schnittgerade	

- $\text{Rang}(A) = 1$ (zwei Eigenwerte von A gleich 0)

$x^2 - 2p\,y = 0$	parabolischer Zylinder	
$x^2 - a^2 = 0$	paralleles Ebenenpaar	
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge	$\{\,\}$

$x^2 = 0$	yz-Ebene	

Für eine allgemein gegebene Quadrik transformiert man auf Normalform und kann dann den Typ aufgrund obiger Tabelle identifizieren.

Beispiel 7.18 Die Normalform der Quadrik

$$q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 6\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 - 12\,x_1 + 4\,x_2 - 10\,x_3 - 11 = 0$$

ist zu bestimmen.

1. Schritt: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 0$, und die Hauptachsenvektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit der Substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

geht die Gleichung der Quadrik über in

$$3\,y_1^2 - 4\,y_2^2 - 6\sqrt{3}\,y_1 - 8\sqrt{2}\,y_2 + 2\sqrt{6}\,y_3 - 11 = 0\,.$$

2. Schritt: Quadratische Ergänzung führt mittels der Translation

$$z_1 = y_1 - \sqrt{3}, \quad z_2 = y_2 + \sqrt{2}, \quad z_3 = y_3 - \sqrt{6}$$

auf die Normalform

$$3\,z_1^2 - 4\,z_2^2 + 2\sqrt{6}\,z_3 = 0\,.$$

Den Typ liest man mittels Vorzeichenvergleich aus obiger Tabelle ab. Es handelt sich um ein Hyperbolisches Paraboloid.

Allgemeine Vorgangsweise: