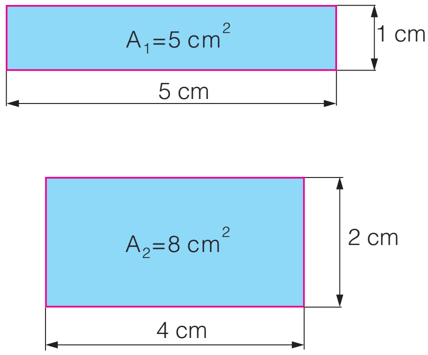
7. Extremwertaufgaben

„Rechtecke gleichen Umfangs haben den gleichen Flächeninhalt.“ Die meisten bei einer kleinen Umfrage interviewten Personen entschieden sich dafür, diesen Satz als richtig anzusehen.



Dies lässt sich aber leicht widerlegen: Die beiden in der Außenspalte dargestellten Rechtecke haben denselben Umfang $u = 12$ cm.

Trotzdem sind ihre Flächeninhalte verschieden:

$$A_1 = 5\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = \mathbf{5\text{ cm}^2} \qquad A_2 = 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = \mathbf{8\text{ cm}^2}$$

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seiten x und y gilt bekanntlich: $A = xy$.

Da sich x in gewissen Grenzen ändern kann — y ergibt sich zwangsläufig aus der Beziehung $x + y = \frac{u}{2}$ — ist anzunehmen, dass eine bestimmte Kombination zweier Werte für x und y ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt liefert.

Und damit sind wir schon bei der typischen Fragestellung einer sogenannten **Extremwertaufgabe**.

Beispiel:

Man berechne unter allen Rechtecken mit dem Umfang $u = 12$ cm jenes mit dem größten Flächeninhalt.

Lösung:

In unserem Beispiel lautet die Hauptbedingung (vgl. Außenspalte)
HB : $A = xy$

Sie enthält **zwei Variable** x, y.

Wenn A möglichst groß werden soll, dann müssen x und y maximiert werden.

Wählen wir also beide unendlich groß, dann nimmt A offensichtlich das absolute Maximum an, oder?

Nun, das wäre richtig, wenn wir die Rechteckseiten **getrennt** variieren dürften, d. h. wenn x und y voneinander unabhängige Variable wären.

Wir haben aber einen Rechtecksumfang $u = 12$ cm vorausgesetzt und unser unendlich großes Rechteck hat doch sicher einen „etwas“ größeren Umfang.

Mit anderen Worten: Wir suchen zwar unter **sehr vielen** Rechtecken, aber nicht unter **allen**. Durch unsere Aufgabenstellung haben wir nämlich das Suchgebiet bereits eingeschränkt.

Diese Einschränkung formulieren wir als Nebenbedingung.

NB : $\frac{u}{2} = x + y \Rightarrow y = \frac{u}{2} - x = 6 - x$

$$y = 6 - x$$

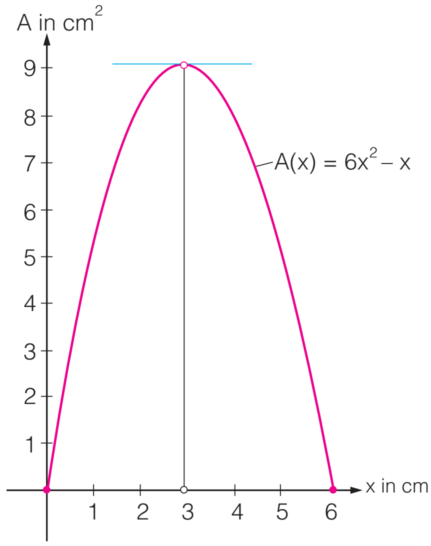
Setzt man dies in die Hauptbedingung ein, so reduziert sich diese auf eine Funktionsgleichung in **einer Variablen**.

HB: $A(x) = xy = x(6 - x)$ [1)]

$$A(x) = 6x - x^2$$

Man nennt die Bestimmungsgleichung für jene Größe, die ein Extremum (Maximum oder Minimum) annehmen soll, die **Hauptbedingung (HB)**.

Jene Gleichung aber, die die vorgegebenen Beziehungen zwischen den auftretenden (und scheinbar unabhängigen) Variablen festlegt, heißt **Nebenbedingung (NB)**.



Oft ist es hilfreich, den Graphen der zu optimierenden Funktion anzufertigen (vgl. obige Figur). Bei dieser Gelegenheit können wir unsere Extremwertaufgabe grafisch lösen: Die Funktion $A(x) = 6x - x^2$ hat bei $x = 3$ eine Extremstelle.

1) Ebenso könnte man in der Nebenbedingung x explizit ausdrücken und in die Hauptbedingung einsetzen.

Bei einigen Extremwertaufgaben (wie beim nebenstehenden Beispiel) ist die Nebenbedingung äußerst einfach zu finden und zu formulieren. Sehr häufig kommt man bei geometrischen Aufgaben mit dem pythagoräischen Lehrsatz oder dem Strahlensatz auf Grund der Ähnlichkeit geometrischer Figuren zum Ziel.

Wichtiger Bestandteil unseres Problems ist die **Definitionsmenge D** für die unabhängige Variable x.

Als Seite eines Rechtecks vom Umfang $u = 12$ cm kann x nur zwischen 0 und $6\left(=\frac{u}{2}\right)$ liegen.

Weiters ist der Funktionsterm $6x - x^2$ dort überall definiert (z.B. tritt nirgends eine Division durch Null auf), so dass für die **Definitionsmenge** D gilt: $D = [0,\ 6] \Rightarrow$ HB: $A(x) = 6x - x^2,\ x \in [0,\ 6]$

Jetzt sind alle Voraussetzungen zur Ermittlung der (relativen) Extremstellen einer Funktionsgleichung (Hauptbedingung) über ihrer Definitionsmenge ($D = [0,\ 6]$) erfüllt.

$$A(x) = 6x - x^2$$
$$A' = 6 - 2x$$
$$A'' = -2$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0$$
$$\left.\begin{array}{r} x = 3 \\ A''(3) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) \text{ wird für } x = 3 \text{ maximal.}$$

Aus der Nebenbedingung ergibt sich für $x = 3$ der Wert der zweiten Rechteckseite mit $y = 3$.

$\Rightarrow$ Der größte Flächeninhalt eines Rechtecks mit einem Umfang $u = 12$ cm wird von einem **Quadrat** mit der Seite $x = y = 3\ \left(=\frac{u}{4}\right)$ angenommen.

$A_{max} = 9\ \text{cm}^2$

Fassen wir zusammen: Eine Größe (z.B. ein Flächeninhalt A, ein Volumen V usw.) hängt von mehreren Variablen ab und soll extremal werden.
Die **Hauptbedingung (HB)** ist die Gleichung der dabei vorliegenden Funktion. Sie enthält normalerweise mindestens zwei (zunächst unabhängige) Variable.
Jene Gleichung(en), die die Beziehung(en) zwischen diesen Variablen festlegt (festlegen), nennt man **Nebenbedingung(en) (NB)**.
Mit Hilfe der Nebenbedingung(en) werden die unabhängigen Variablen in der Hauptbedingung auf eine einzige reduziert.

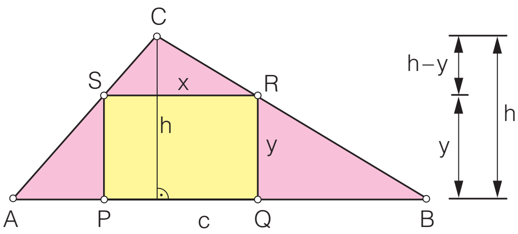
Ganz so schwierig wie unser Schüler glaubt sind Extremwertaufgaben auch wieder nicht. Wir laden die Leserinnen und Leser ein, umzublättern. Auf der nächsten Seite wird gezeigt, dass sich die Lösung einer Extremwertaufgabe in 9 Teilschritte zerlegen lässt.

Beispiel:

Dem Dreieck ABC mit der Seite $c = 10$ cm und der zugehörigen Höhe $h = 4$ cm ist das flächengrößte Rechteck PQRS so einzuschreiben, dass eine Rechteckseite auf c zu liegen kommt.

Lösung:

1



2 HB: $A = xy \to$ maximal

3 Die Dreiecke ABC und SRC sind ähnlich. Es gilt daher die Proportion

NB: $c : h = x : (h - y) \Leftrightarrow c(h - y) = hx$

NB: $x = \frac{c(h-y)}{h}$

4 $A(y) = xy = \frac{c(h-y)}{h} \cdot y = \frac{c}{h}(hy - y^2)$

HB: $A(y) = \frac{c}{h}(hy - y^2)$

Als einzige unabhängige Variable tritt nur mehr y auf. (c und h sind Parameter.)

5 $\frac{c}{h}$ ist ein konstanter positiver Faktor im Term $\frac{c}{h}(hy - y^2)$ der Hauptbedingung. Somit darf $\frac{c}{h}$ weggelassen werden (vgl. Außenspalte) und wir können schreiben $\left(\frac{c}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5 = \text{konstant}\right)$:

HB: $\overline{A}(y) = hy - y^2$

6 $\overline{A}(y) = hy - y^2,\ y \in [0,\ h]$

$\overline{A}'(y) = h - 2y$

$\overline{A}'(y) = h - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{h}{2}$ $\qquad y = \frac{h}{2} = 2$ cm

7 $\overline{A}''(y) = -2$

$\overline{A}''\left(\frac{h}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \overline{A}(y)$ bzw. $A(y)$ besitzt bei $y = \frac{h}{2}$ ein **relatives Maximum.**

8 $x\frac{c(h-y)}{h} = \frac{c\left(h - \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{c}{2}$ $\qquad x = \frac{c}{2} = 5$ cm

9 $A_{max} = xy = \frac{c}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{4} = 10$ $\qquad A_{max} = \frac{ch}{4} = 10\ \text{cm}^2$

Das gesuchte Rechteck PQRS hat die Seiten $x = \frac{c}{2}$ (= 5 cm) und $y = \frac{h}{2}$ (= 2 cm). Sein Flächeninhalt A_{max} (= 10 cm^2) ist halb so groß wie jener des Dreiecks ABC.

1 Wenn möglich und notwendig, wird man den Sachverhalt in einer **Skizze** darstellen.

2 Aufstellen der **Hauptbedingung**.

3 Aufstellen der **Nebenbedingung(en)**.

4 **Substitution** in der Hauptbedingung. Dadurch reduzieren sich die (unabhängigen) Variablen auf eine einzige.

5 **Vereinfachen der Hauptbedingung** durch Weglassen von

— **konstanten Summanden** [1]
(f(x) + c) ist extremal) ⇔
⇔ (f(x)ist extremal)

— **konstanten positiven Faktoren** [1]
(kf(x)ist extremal) ⇔ f(x) ist extremal, $k > 0$

— **konstanten positiven Exponenten** [1], die den Funktionsterm f(x) potenzieren
$((f(x))^n$ ist extremal) ⇔
⇔ ((f(x) ist extremal), falls $f(x) > 0, n \in \mathbb{R}^{+}$ [2]).

6 Feststellen der **Definitionsmenge** D der vereinfachten Hauptbedingung und Berechnung ihrer **möglichen Extremstellen**.

7 Bestimmen der **Art des relativen Extremums** durch Berechnung der **zweiten** Ableitung an der „möglichen Extremstelle" aus 6.

8 Ermittlung der **Werte** aller **übrigen Variablen** mit Hilfe der NB und den in 6 und 7 bestimmten Extremstellen.

9 Berechnung des **Extremwerts**.

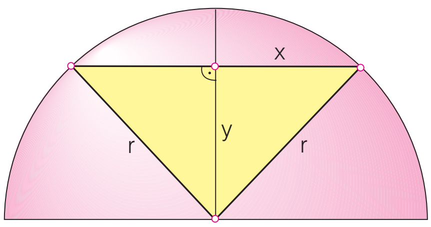
1) **Variable** als Summanden, Faktoren oder Exponenten dürfen freilich **nicht** weggelassen werden
2) Allerdings verzichtet man dabei auf Extremwerte an Nullstellen.

Beispiel:

Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 5$ dm ist jener Drehkegel einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt und das größte Volumen besitzt.

Lösung:

1



2 HB: $V(x, y) = \frac{x^2 \cdot \pi \cdot y}{3} \rightarrow$ maximal

3 NB: $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 = r^2 - y^2$

4 Substitution: $V(y) = \frac{(r^2 - y^2) \cdot \pi \cdot y}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot (r^2 y - y^3)$

5 Vereinfachung: $\overline{V(y)} = r^2 y - y^3$

(Weglassen des konstanten Faktors.)

6 Definitionsmenge: $x, y \in [0, r]$

(Nicht streng monoton wachsend oder fallend)

relatives Extremum:

$\overline{V(y)}' = r^2 - 3y^2$

$\overline{V(y)}' = r^2 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ $\qquad y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ dm

7 Art des Extremums

$\overline{V(y)}'' = -6y$

$\overline{V\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)}'' = -6 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{3} = -10\sqrt{3} < 0$

relatives Maximum an dieser Stelle

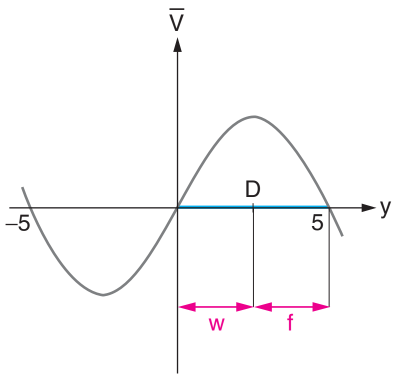
8 Weitere Werte:

$x^2 = r^2 - y^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r\sqrt{6}}{3}$ $\qquad x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ dm

9 Größtes Volumen:

$V(x, y) = \frac{x^2 \cdot \pi \cdot y}{3} = \frac{\frac{2r^2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{r\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}r^3\pi}{27}$

$V = \frac{2\sqrt{3} \cdot 5^3 \pi}{27} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 125\pi}{27} = 50,3833$ dm^3



Ist die Funktion f(x) auf ihrem Definitionsintervall D streng monoton (**w**achsend oder **f**allend), so nimmt sie ihre **absoluten Extrema** an den **Intervallgrenzen** an. Wir sprechen dabei vom **Randmaximum** bzw. **Randminimum**. Etwaige relative Extrema können dann nur außerhalb von D liegen.

Aufgaben

265 Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 10 beträgt, soll ein Maximum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate das zugehörige Produkt zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

266 Die Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 6 beträgt, soll ein Minimum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate die zugehörige Quadratsumme zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

267 Die Summe der Kuben zweier natürlicher Zahlen, deren Summe 4 beträgt, soll ein Minimum werden. Wie sind die Zahlen zu wählen?

a) Die Aufgabe ist durch Testen sämtlicher Möglichkeiten zu lösen. Man stelle diese in einem Koordinatensystem dar, wobei als Abszisse ein Summand, als Ordinate die zugehörige Kubensumme zu wählen ist.

b) Lösung mittels Differenzialrechnung.

268 Eine reelle Zahl $a \neq 0$ ist zu zerlegen

a) in zwei Summanden, so dass ihr Produkt

b) in zwei Summanden, so dass die Summe ihrer Quadrate

c) in zwei Summanden, so dass die Summe ihrer Kuben

d) in zwei Faktoren, so dass die Summe der Faktoren

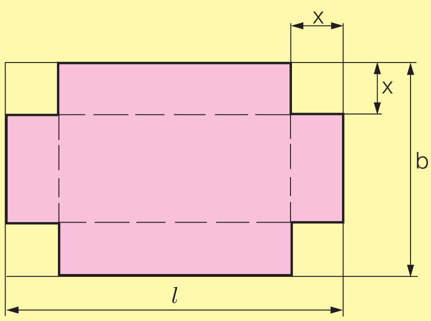
e) in zwei Faktoren, so dass die Summe der Quadrate der Faktoren

f) in zwei Summanden, so dass die Summe aus dem Quadrat des ersten und dem doppelten Quadrat des zweiten Summanden

ein Extremum wird. Es ist jeweils zu untersuchen, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.

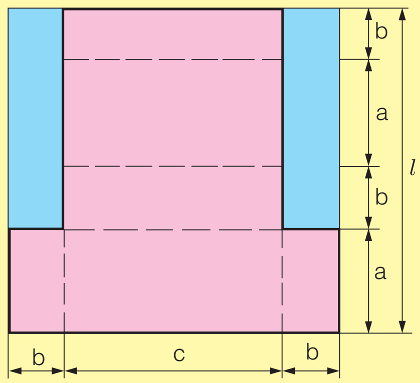
269 Aus einem rechteckigen Karton mit den Seitenlängen **a)** $l = 40$ cm und $b = 25$ cm **b)** $l = 8$ dm und $b = 5$ dm ist durch Ausschneiden von Quadraten der Seitenlänge x an den Ecken und anschließendes Aufbiegen der Seitenwände eine quaderförmige, oben offene Schachtel herzustellen.

Wie groß muss x gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal wird? Wie groß ist dieses? Wie groß ist dabei der Abfall (das ist die Fläche der ausgeschnittenen Quadrate) absolut und relativ zur ursprünglichen Kartonfläche?



270 Aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge l soll durch Ausschneiden von quadratischen Ecken der Länge x und Aufbiegen der entstehenden Seitenwände ein auf einer Seite offenes Kleingehäuse in der Form eines quadratischen Prismas hergestellt werden.

Wie groß sind die auszuschneidenden Ecken zu wählen, damit das Volumen maximal wird? Man gebe auch die Gehäuseabmessungen und das Volumen an.



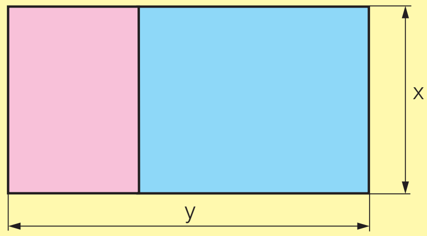
271 Wie lang sind die Seiten a, b des flächengrößten Rechtecks **a)** mit einem Umfang $u = 24$ cm **b)** für einen beliebigen Umfang u? Wie groß ist seine Fläche?

272 Wie groß sind die Abmessungen und der Flächeninhalt der größten rechteckigen Wiese, die mit 360 m Stacheldraht dreifach eingezäunt werden kann?

273 Eine Strecke a ist so in vier Teile zu zerlegen, dass das aus den Teilstrecken gebildete Rechteck maximalen Flächeninhalt besitzt. Man berechne A_{max}!

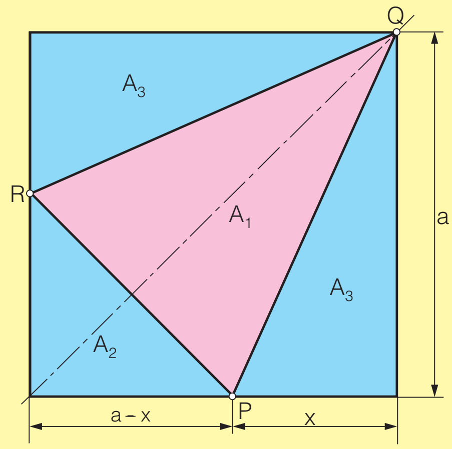
274 Ein rechteckiges Feld mit dem Flächeninhalt $A = 1536\,\text{m}^2$ soll eingezäunt werden. Anschließend soll es durch einen weiteren Zaun — parallel zu einer der Seiten — in zwei Teile geteilt werden, so dass die Gesamtlänge des Zauns ein Minimum wird.

Wie müssen sich die Seiten des Felds verhalten?

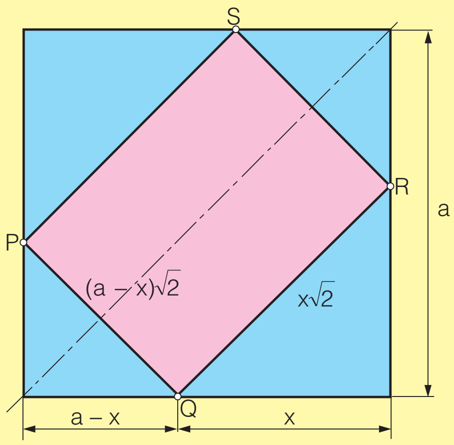


275 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein gleichschenkeliges Dreieck PQR mit größtem Flächeninhalt A_1 einzuschreiben (vgl. nebenstehende Figur). Wie groß ist A_1?

Anleitung: $A_1 = a^2 - A_2 - 2A_3$



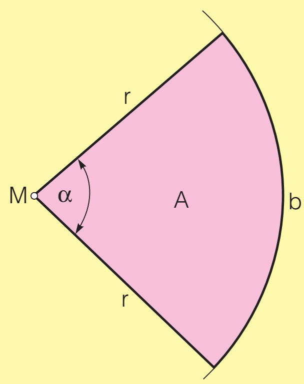
276



Dem Quadrat in nebenstehender Figur (Seitenlänge a) ist das flächengrößte Rechteck PQRS einzuschreiben. Wie groß ist seine Fläche?

277 Von allen Kreissektoren **a)** mit dem Umfang $u = 100$ cm **b)** mit einem beliebigen Umfang u ist jener mit maximalem Flächeninhalt A gesucht. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

Anleitung: $A = \frac{b \cdot r}{2}$



278 Ein Lastkraftwagen unterliegt einem jährlichen Wertverlust von € 9 000,— . Seine Verwendung liefert einen jährlichen Ertrag von € 40 000,— . Die Betriebskosten betragen im ersten Jahr € 10 000,— und steigen in jedem weiteren Jahr um € 2 000,—.

Nach wie vielen Jahren ist der günstigste Verkaufszeitpunkt, d.h. der erzielte Gesamtgewinn am größten?

Anleitung: Die Betriebskosten bilden eine arithmetische Folge.

279 Wird eine Musik-CD zu einem bestimmten Preis p (in €) angeboten, so besteht eine Nachfrage von $x = 30\,000 - 1\,000p$ [1] (Stück). (Hier wird angenommen, dass die Nachfrage sinkt, wenn der Preis steigt.) Der sich daraus ergebende Umsatz U ist von der Anzahl der verkauften Stück und dem zugehörigen Preis abhängig: $U = px$

Der maximale Umsatz ist zu ermitteln.

280 Beim Verkauf einer Zeitschrift wurde festgestellt, dass die Nachfrage bei steigendem Stückpreis **linear** absinkt. So wurden beim Preis von € 3,— pro Einzelexemplar 1 500 Stück verkauft, bei € 5,— hingegen nur 1 000 Stück.

Bei welchem Stückpreis lässt sich der größtmögliche Umsatz (= Stückpreis mal Stückzahl) erzielen?

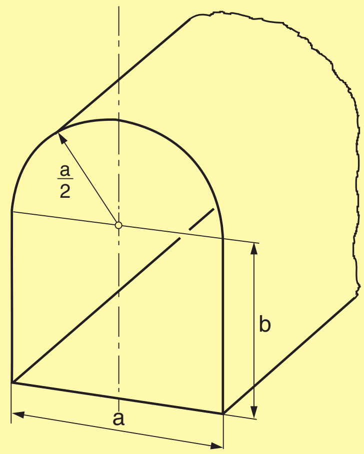
281 **a)** Aus einer Strecke der Länge l sind die Basis c und die Höhe eines gleichschenkeligen Dreiecks derart zu bilden, so dass die zugehörige Dreiecksfläche A extremal wird. Wie groß sind c, h_c, A?

b) Liegt ein Minimum vor? Die Antwort ist zu begründen.

282 Von allen rechtwinkeligen Dreiecken mit gegebenem Umfang u ist jenes herauszufinden, das eine möglichst kurze Hypotenuse c aufweist. Diese ist zu bestimmen.

283 Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. nebenstehende Figur).

Wie muss der Kanalquerschnitt bei $u = 10$ m dimensioniert werden, damit die Durchflussmenge maximal wird? Wie groß ist die Querschnittsfläche A?



284 Es sind der Radius r und die Höhe h jenes **a)** offenen **b)** geschlossenen zylindrischen Kessels mit $V = 58$ l Inhalt zu bestimmen, dessen Materialkosten minimal sind.

285 Welcher **a)** Drehzylinder **b)** quadratische Quader hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen V? V_{max}?

286 Welcher **a)** Drehzylinder **b)** quadratische Quader hat bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche O? O_{min}?

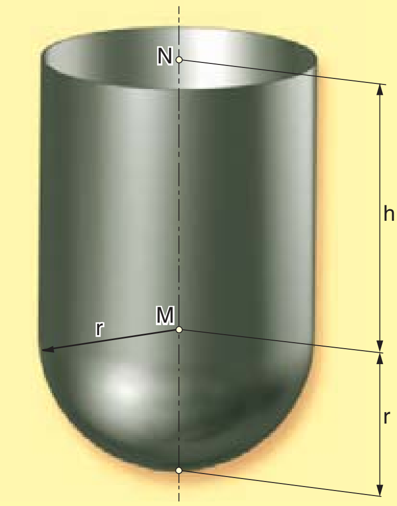
[1] Diese Nachfragefunktion wurde beliebig gewählt.

287 Ein Behälter aus Blech, dessen Fassungsvermögen 600 l beträgt, soll die Form eines Zylinders mit unten angesetzter Halbkugel haben (vgl. nebenstehende Figur).

a) Wie ist die Form des Behälters zu wählen, d. h. in welchem Verhältnis stehen Radius r und Höhe h, wenn ein Minimum an Blech verbraucht werden soll?

b) Wie hoch sind die Materialkosten, wenn 1 m^2 € 101,80 kostet?

c) Wie viel Blech benötigt man, wenn der Behälter aus einem **gleichseitigen** Zylinder mit angesetzter Halbkugel besteht? Um wie viel erhöhen sich dabei die Materialkosten?



288 Eine Maschine wird um € 80 000,— angekauft. Der (gleich bleibende) Jahresertrag beläuft sich auf € 50 000,—. Der jährliche Wertverlust beträgt 10 % des Anschaffungswerts.

a) Nach wie vielen Jahren x sollte die Maschine verkauft werden, damit ein maximaler Gesamtgewinn erreicht wird? Dabei ist zu berücksichtigen, dass die jährlichen Kosten im ersten Jahr € 5 000,— ausmachen und in jedem weiteren Jahr um € 2 000,— zunehmen.

Anleitung: Gewinn = Jahresertrag + Verkaufserlös – Summe der Instandhaltungskosten
Nach x Jahren ist der Verkaufserlös: 80 000 – 8 000x
Nach x Jahren ist die Summe der Instandhaltungskosten: $\frac{x}{2} \cdot [10\,000 + (x-1) \cdot 2\,000]$ (arithmetische Folge)

b) Wie hoch ist der maximale Gewinn?

289 **a)** Von allen gleichschenkeligen Dreiecken der Schenkellänge a ist jenes zu finden, das den größten Flächeninhalt aufweist.

b) Wie groß ist dieser?

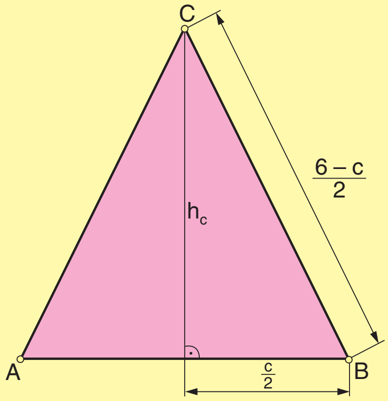
c) Welche Form hat das gesuchte Dreieck?

290 **a)** Man berechne die Länge der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks mit maximalem Flächeninhalt A, wenn s = 6 cm die Summe der Längen von Grundlinie c und zugehöriger Höhe h_c ist.

b) Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks mit dem Umfang u = 2 cm wenn die Hypotenuse möglichst klein sein soll?

c) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Schenkellänge s = 2 cm annehmen?

d) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Umfang u = 6 cm annehmen (vgl. nebenstehende Figur)?



e) Welchen maximalen Flächeninhalt A kann ein Dreieck mit der Grundlinie c und dem Umfang u annehmen?

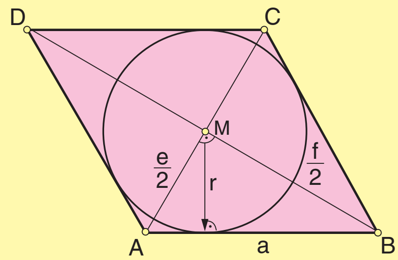
f) Wie groß ist der maximale Flächeninhalt A eines rechtwinkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse c?

291 Einem Kreis mit Radius r ist ein Rhombus mit möglichst kleinem Flächeninhalt zu umschreiben. Wie groß ist der Flächeninhalt?

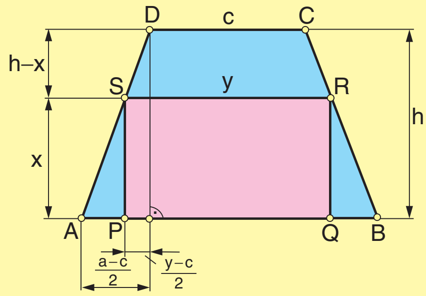
Anleitung:

$A = \frac{e \cdot f}{2}$, $A_{ABM} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e \cdot f}{4} = \frac{1}{2} ar \Rightarrow$ **(1)** $a^2 = \frac{e^2 \cdot f^2}{16r^2}$ **(2)** $\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2$

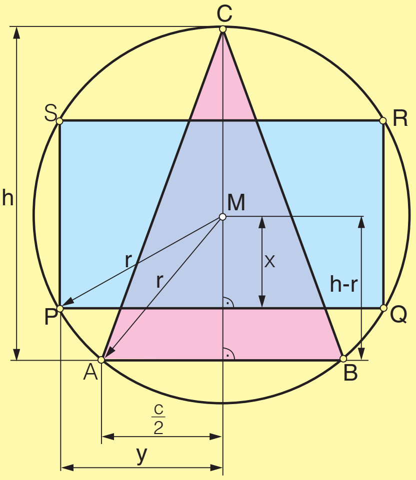
Aus **(1)** und **(2)** folgt: $e^2 = \frac{4 \cdot r^2 \cdot f^2}{f^2 - 4r^2}$ ...



292 Einem gleichschenkeligen Trapez mit $a = 10$ cm, $c = 4$ cm und $h = 3$ cm ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, dass eine Seite auf der Basis des Trapezes liegt. Man berechne A_{max}!



293



Einem Kreis mit dem Radius r ist einzuschreiben (vgl. nebenstehende Figur):

a) das Rechteck mit größtem Flächeninhalt A

b) das Rechteck mit größtem Umfang u

c) das gleichschenkelige Dreieck mit größtem Flächeninhalt A.

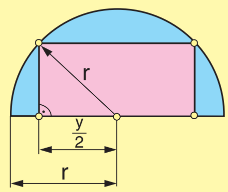
Anleitung: $r^2 = (h - r)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe.

294 Einem Halbkreis mit dem Radius r ist einzuschreiben:

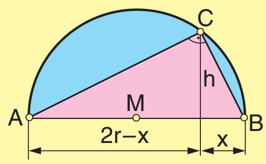
a) das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A

b) das Rechteck mit maximalem Umfang u



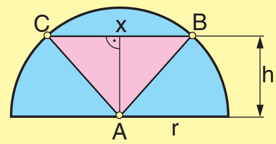
c) das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt A

Anleitung: Höhensatz!

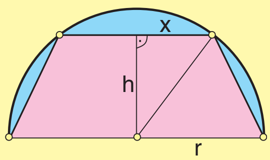


d) das gleichschenkelige Dreieck mit maximalem Flächeninhalt A, dessen Spitze im Mittelpunkt des Halbkreises liegt.

Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe.



295



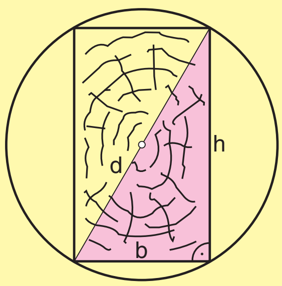
Einem Halbkreis (Radius r) ist ein Trapez so einzuschreiben, dass die Basis mit dem Randdurchmesser des Halbkreises zusammenfällt.

a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?

b) Man bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte von Trapez und Halbkreis.

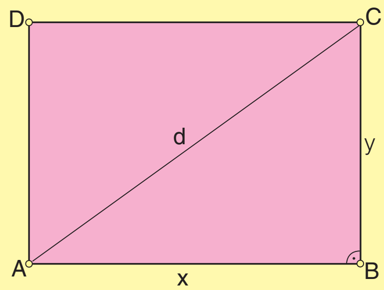
296 Einem Viertelkreis mit dem Radius r soll ein Rechteck so eingeschrieben werden, dass zwei benachbarte Rechteckseiten auf den beiden Begrenzungsradien liegen. Abmessungen und Flächeninhalt des unter dieser Nebenbedingung größten Rechtecks sind zu berechnen.

297 Aus einem Baumstamm mit einem durchgängig gleich großen, kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von maximaler Tragfähigkeit T geschnitten werden. Schon die Phönizier gaben an, dass Holzbalken besonders tragfähig seien, wenn sich die Abmessungen des Querschnitts wie die Seite zur Diagonale eines Quadrates verhalten. Man untersuche diese Aussage.



Anleitung: $T = c \cdot b \cdot h^2$ ..... Proportionalitätsfaktor

298 Von allen Rechtecken mit dem Umfang u ist jenes mit der kürzesten Diagonale d zu ermitteln.



299 Man zeige: Wählt man bei einem kegelförmigen Zelt mit vorgegebenem Volumen V die Höhe $h = r\sqrt{2}$, so ist der Materialaufwand minimal.

300 Eine Speiseglocke habe die Form einer Halbkugel mit dem Radius r = 30 cm. Welche Maße und welchen Inhalt hat das volumsgrößte, zylindrische Gefäß, das unter diese Glocke passt?

301 Einer Kugel mit dem Radius r = 6 cm soll ein Drehkegel mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Man berechne **a)** Radius r′ **b)** Höhe h und **c)** Volumen V dieses Drehkegels!

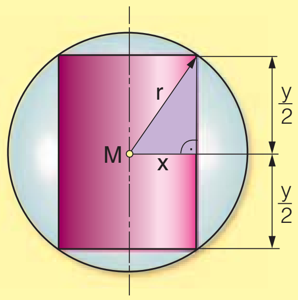
302 Einer Halbkugel **a)** mit dem Radius r = 5 dm **b)** mit einem beliebigen Radius r ist jener Drehkegel einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt und der das größte Volumen hat.

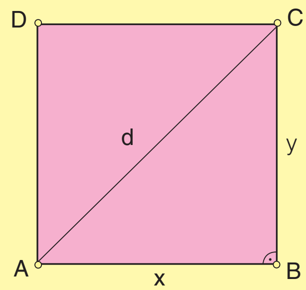
Man berechne (1) seine Abmessungen (2) sein Volumen (3) das Verhältnis der Volumina von Kegel und Halbkugel.

303 Welcher Drehkegel mit gegebener Mantelfläche M hat das größte Volumen?
Man berechne **a)** Radius r, Höhe h, Erzeugende s **b)** Maximalwert des Rauminhalts.

304 Einer Kugel mit dem Radius r ist einzuschreiben:

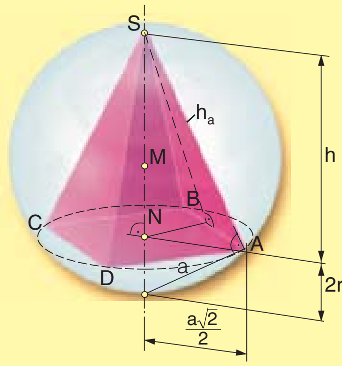
a) der Drehzylinder mit maximalem Volumen V
b) der Drehzylinder mit maximaler Mantelfläche M
c) der Drehzylinder mit maximaler Oberfläche O
d) der Drehkegel mit maximalem Volumen V
e) der Drehkegel mit maximaler Mantelfläche M
f) der Drehkegel mit maximaler Oberflache O.





Man berechne jeweils den Extremwert der gefragten Größe!
Anleitung: In **a)** bis **c)** verwende man den pythagoräischen Lehrsatz, in **d)** bis **f)** wende man den Höhensatz an.

305 Einer Kugel mit dem Radius r = 10 cm soll die quadratische Pyramide mit maximaler Mantelfläche M eingeschrieben werden (vgl. nebenstehende Figur). M_{max}?

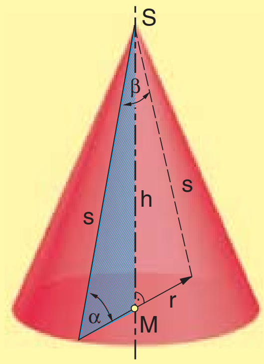


306 Welche gerade quadratische Pyramide hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen V? V_{max}?

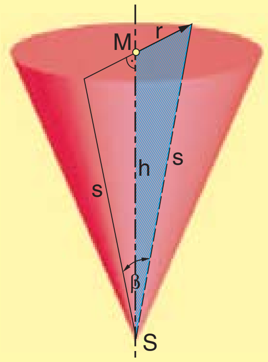
307 Welche gerade quadratische Pyramide hat bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche O? O_{min}?

308 Wie groß muss der Öffnungswinkel β eines Kegels mit der Oberfläche $O = 1\,dm^2$ gewählt werden, wenn das Volumen maximal werden soll?

Anleitung: Zunächst sind Radius und Höhe des Kegels zu berechnen. Erst zuletzt wird eine trigonometrische Funktion zur Berechnung des Öffnungswinkels herangezogen.



309



Ein trichterförmiger, oben offener Behälter soll ein Volumen von $1\,m^3$ haben (vgl. nebenstehende Figur).

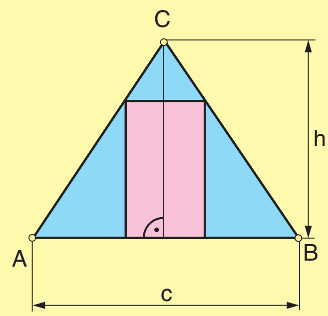
a) Wie groß ist der Öffnungswinkel β zu wählen, damit möglichst wenig Material zur Herstellung des Behälters benötigt wird?

b) Wie viel kostet die Herstellung dieses Behälters, wenn $1\,m^2$ Material € 80,— kostet?

c) Welche Mehrkosten entstehen gegenüber den in **b)** ermittelten Kosten, wenn der Behälter in Form eines gleichseitigen Kegels hergestellt wird?

310 Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Höhe $h = 6\,cm$ und der Basis $c = 8\,cm$ soll ein Rechteck von maximalem Flächeninhalt A eingeschrieben werden. Wie groß ist dieser?

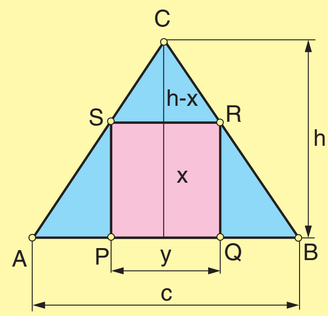
Anleitung: $8 : 6 = y : (6 - x)$



311 Einem Dreieck mit der Höhe $h = 3\,cm$ und der Basis $c = 4\,cm$ soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A eingeschrieben werden. Die Lage des Rechtecks ist aus nebenstehender Figur ersichtlich.

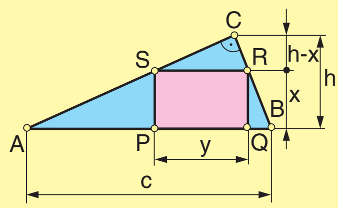
In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt des Rechtecks zu dem des Dreiecks?

Anleitung: $3 : 4 = (h - x) : y$



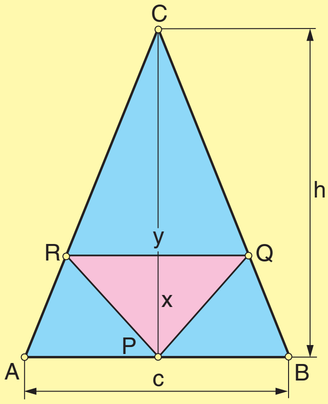
312 Einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten $a = 24\,cm$ und $b = 10\,cm$ wird ein Rechteck derart eingeschrieben, dass eine Rechteckseite auf der Hypotenuse c liegt. Wie groß ist A_{max}?

Anleitung: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $h = \frac{a \cdot b}{c}$, $h : c = (h - x) : y$ (vgl. nebenstehende Figur)



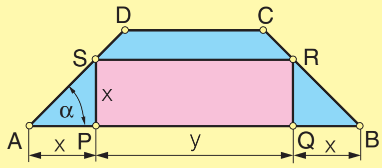
313 Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Höhe $h = 10$ cm und der Basis $c = 8$ cm wird ein gleichschenkeliges Dreieck so eingeschrieben, dass die Spitze im Halbierungspunkt der Basis des gegebenen Dreiecks liegt (vgl. Figur).

Man berechne jenes mit maximalem Umfang.

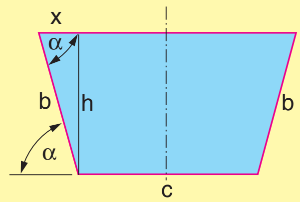


314 Einem Rechteck mit den Seiten a, b ist das flächenkleinste gleichschenkelige Dreieck zu umschreiben. Abmessungen, Flächeninhalt?

315 Einem gleichschenkeligen Trapez (vgl. Figur) mit Winkel $\alpha = 45°$ ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, dass eine Rechteckseite auf der Basis des Trapezes liegt.

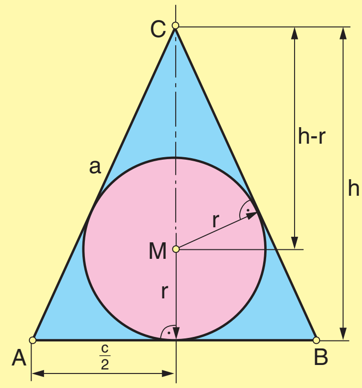


316 Wie sind die Abmessungen des Querschnitts eines Kanals zu wählen, wenn dieser ein oben offenes symmetrisches Trapez mit dem Böschungswinkel $\alpha = 75°$ und dem Flächeninhalt $A = 10\,m^2$ ist, wobei der benetzte Umfang möglichst gering sein soll?



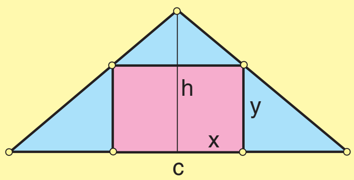
317 Einem Kreis mit dem Radius r ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit möglichst kleinem Umfang zu umschreiben.

Anleitung: $a : \frac{c}{2} = (h - r) : r$



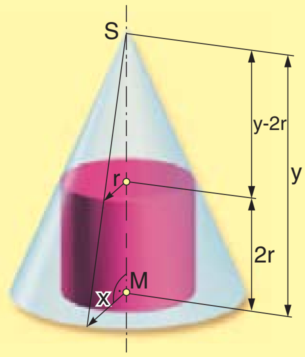
318 Der Querschnitt eines Dachbodens hat die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks mit einer Höhe $h = 5$ m und einer Basis $c = 12$ m. Der Dachbodenraum selbst bildet ein dreiseitiges Prisma mit $l = 15$ m Länge.

Im Zug des Dachausbaus sollen Räumlichkeiten eingerichtet werden — allerdings ohne Mansarde, d. h. die Wände sollen senkrecht und die Decke waagrecht sein. Man bestimme Abmessungen und Grundfläche des nutzbaren Raums, wenn sich dieser durch größtmögliches Volumen auszeichnen soll.



319 Einem Drehkegel (r, h) soll der volumsgrößte Drehzylinder eingeschrieben werden. Wie groß ist dessen Radius r, Höhe h und Volumen V?

320 Welcher Drehkegel, der einem gleichseitigen Zylinder mit Radius $r = 9$ cm umschrieben ist, hat das kleinste Volumen V (vgl. Figur)? Wie groß ist V_{min}?



321 Einer Kugel mit Radius $r = 12$ dm soll ein Drehkegel von minimalem Volumen umschrieben werden! Man bestimme **a)** Radius r **b)** Höhe h **c)** V_{max}.

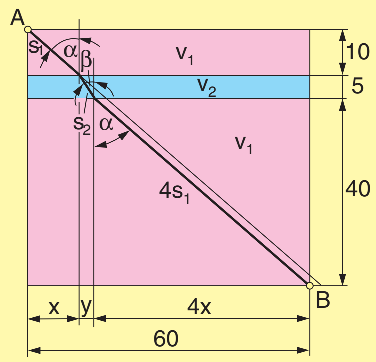
322 Ein Wanderzirkus besitzt einen Raubtierkäfig, der die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser $d = 16$ m und einer Höhe $h = 4$ m aufweist.

Welche Abmessungen hat das kegelförmige Zelt, das den Käfig berühren, dabei aber — aus thermischen Gründen — ein möglichst kleines Volumen haben soll?

323 Der stündliche Benzinverbrauch eines Autos ist von der Geschwindigkeit des Autos abhängig. Wenn x die Geschwindigkeit in km/h und y der stündliche Brennstoffverbrauch in l ist, gilt: $y = 0{,}005x^2 - 0{,}4x + 18$.

Welcher Weg kann bei einem Benzinvorrat von 48 l maximal zurückgelegt werden? Man berechne weiters die zugehörige Geschwindigkeit und den stündlichen Benzinverbrauch!

Anleitung: Weg = Geschwindigkeit · (Fahr)zeit, Fahrzeit = $\frac{\text{Benzinvorrat}}{\text{stündlicher Verbrauch}}$



324 Jemand startet in Punkt A auf einer Wiese mit $v_1 = 10$ km/h, durchquert eine Waldschneise mit $v_2 = 2{,}5$ km/h und läuft hernach wiederum auf einer Wiese mit v_1 bis zum Ziel B (vgl. nebenstehende Figur). Welche Richtungen α und β sind einzuschlagen, um eine möglichst gute Laufzeit zu erreichen?

Anleitung: Man wähle x als unabhängige Variable. Erst am Schluss der Rechnung ist die Trigonometrie einzusetzen.

325 Der Ölverbrauch E eines Passagierschiffes ist von seiner Geschwindigkeit v abhängig: $E(v) = av^3 + b$ (E in t/h, v in km/h).

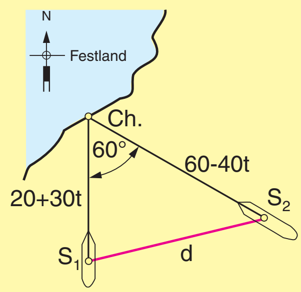
a) Welche Geschwindigkeit v hat der Schiffskapitän anzuordnen, um mit einem gegebenen Ölvorrat m möglichst weit zu gelangen? ($a = 10^{-3}\text{th}^2\text{km}^{-3}$, $b = 2\text{th}^{-1}$)

b) Wie lang ist der maximale Reiseweg s für m = 1000 t Vorrat? Wie lange dauert diese Reise?

Bemerkung: Die Terme in der Funktionsgleichung für E (v) haben folgende Bedeutung:

av^3..... Brennstoffverbrauch der Schiffsmotoren

b ..... Konstanter Verbrauch (Heizung, Licht, Pumpen, Klimaanlagen)



326 Ein Schiff S_1, das sich um 17.40 Uhr 20 km südlich vom Hafen Charleston (South Carolina, USA) befindet, entfernt sich in Richtung Süden mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h. Zur gleichen Zeit nähert sich ein zweites, 60 km von Charleston entferntes Schiff S_2 aus dem Südosten mit 40 km/h dem Hafen, wobei die Kurse der beiden Schiffe einen Winkel von 60° einschließen (vgl. nebenstehende Figur).

a) Nach welcher Zeitspanne ist die Entfernung der beiden Schiffe am kleinsten?

b) Wie groß ist diese Entfernung?

Anleitung: Man verwende den Kosinussatz.

327 Man zeige:

a) $f(x) + c$ ist **genau dann** extremal wenn $f(x)$ extremal ist. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante Summanden** weggelassen werden.)

b) $kf(x)$ ist **genau dann** extremal wenn $f(x)$ extremal ist, falls $k > 0$. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante positive Faktoren** weggelassen werden.)

c) $[f(x)]^n$ ist **genau dann** extremal, wenn $f(x)$ extremal ist, falls $f(x) > 0$ und $n \in \mathbb{R}^+$. (D. h. bei der Hauptbedingung einer Extremwertaufgabe dürfen **konstante positive Exponenten** weggelassen werden, falls $f(x)$ positiv ist.)

Der Sachverhalt ist jeweils grafisch zu veranschaulichen.

328 Eine Polynomfunktion $f(x)$ habe bei x_0 eine Nullstelle gerader Vielfachheit k. (x_0 ist also mindestens eine Doppelwurzel.) Es ist nachzuweisen, dass x_0 eine Extremstelle ist.

Anleitung: $f(x) = g(x) \cdot (x - x_0)^k = g(x) \cdot (x - x_0)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $g(x_0) \neq 0, \ldots$

329 Der Energieverbrauch fliegender Vögel hängt von der Masse des Vogels und der Fluggeschwindigkeit ab. Der ziehende Vogel bezieht seine Energie durch Verbrennen der während des Tags aufgebauten Fettvorräte. Rotkehlchen, die durchschnittlich 16 g wiegen, erhöhen vor dem Aufbruch zum nächtlichen Zug ihre Körpermasse auf 18 g. Beim morgendlichen Einfall am Zielort wiegen sie nur mehr 15 g. Ein Drittel des Massenverlusts ist auf nächtliche Darmentleerung und auf den zum Erhalt der allgemeinen Körperfunktionen notwendigen Energieverbrauch zurückzuführen, zwei Drittel entsprechen dem für den Flug aufgebrauchten Fettvorrat. Aus dem Verbrennen von 1 g Fett gewinnt der Vogel 3 936 J an Energie.

Die Energie in Joule, die der Vogel pro Gramm Körpermasse und pro geflogenem Kilometer verbrennt, kann näherungsweise durch die Formel $E(v) = \frac{1}{v} \cdot (0{,}31 \cdot (v - 35)^2 + 92)$ bestimmt werden. Hierbei ist v die Geschwindigkeit des Vogels in km/h gegenüber der Luft.

a) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieverbrauch pro geflogenem Kilometer am geringsten? Wie hoch ist dabei der Energieverbrauch eines im Mittel 16 g schweren Rotkehlchens pro Flugstunde?

b) Wie viel Energie steht einem Rotkehlchen für seinen nächtlichen Flug zur Verfügung? Welche Strecke kann ein Rotkehlchen bei geringst möglichem Energieverbrauch in einer Nacht zurücklegen?

c) Rotkehlchen starten zu ihrem nächtlichen Zug so, dass sie mit der ersten Morgendämmerung ihr Ziel erreichen. Mitte April beginnt in Österreich die Morgendämmerung etwa um 4.30 Uhr. Wie lange nach Ende der Abenddämmerung um 19.30 Uhr muss das Rotkehlchen starten, um das Ziel mit Erschöpfen seiner Energiereserven zu Beginn der Morgendämmerung zu erreichen?