Themen:

Reihen, Konvergenz, Differentialrechnung

Umfang:	10 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Konvergenz und Grenzwert):

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Wert der jeweiligen Reihe:

a) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^{n}\right)$ und $i^{2}=-1$

Aufgabe A2 (Nur Konvergenz):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Ein Grenzwert ist gegebenenfalls nicht anzugeben.

a) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^{2}}\right)$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n^{3}}\right)$

c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+3)}{n!}\right)$

Aufgabe A3 (Dreiecke):

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a. Nun konstruieren wir ein neues Dreieck, das wieder gleichseitig ist und als Kantenlänge die Höhe des vorangegangenen Dreiecks besitzt. Wir wiederholen diesen Vorgang iterativ.

Wie groß sind dann der Gesamtflächeninhalt und der Gesamtumfang aller Dreiecke zusammen?

Aufgabe A4 (Etwas Altes – Gleichungen lösen – Substitution I):

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $x^4 - 5x^2 = -6$

b) $x^4 - 5x^2 = 6$

c) $x^8 - 3x^4 = 4$

Aufgabe A5 (Substitution II):

Lösen Sie die angegebenen Gleichungen.

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\left(2\sqrt{x} - 3\right) + 3 = \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{9}$

c) $e^{x-1} + 1 = 2e^{1-x}$

d) $\left(\ln(x)\right)^2 - 4 \cdot \ln(x) = -1$

Aufgabe A6 (Funktionsbetrachtungen):

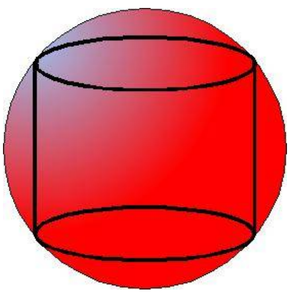
g sei eine zweimal differenzierbare Funktion mit $g(x) \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn x_1 Nullstelle der Ableitungsfunktion von g ist, dann ist x_1 auch Nullstelle der Ableitungsfunktion von h mit

$$h(x) = \frac{5g(x) - 4}{g(x) + 1}.$$

Nun sei x_2 eine Wendestelle von g **und** h. Welche Steigung hat dann die Tangente im zugehörigen Wendepunkt des Schaubildes von g?

Aufgabe A7 (Extremwertproblem):

Einer Kugel K mit dem gegebenen Radius r_K werde ein Zylinder einbeschrieben (siehe Figur 1). Wie sind die Höhe h_Z und der Radius r_Z des Zylinders in Abhängigkeit von r_K zu wählen, damit der Mantel des Zylinders maximal wird?



Figur 1: Kugel mit einbeschriebenem Zylinder.

Aufgabe A8 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit):

Gegeben sei die folgende, abschnittsweise definierte Funktion f mit

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot e^{x}+2 & x\le 0,\\ ax^{2}+b & x>0.\end{cases}$$

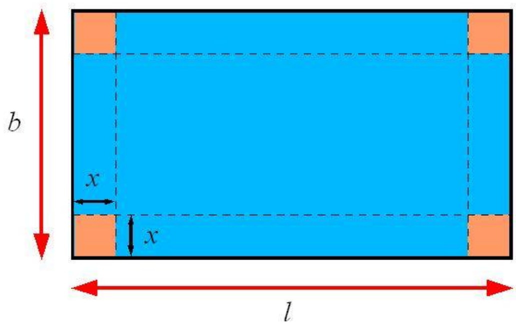
Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit die Funktion f

a) stetig
b) differenzierbar

ist?

Aufgabe A9 (Von Schachteln und Kisten, Extremwertaufgaben mit Randwerten):

Wir interessieren uns im Folgenden für Verpackungen und hier speziell für Schachteln. Diese lassen sich durch entsprechendes Einschneiden kleiner Quadrate in einen rechteckiges/n Papier/Karton herstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) sei $l \ge b$. Eine Skizze hierzu sehen wir in Figur 2.



Figur 2: Eine Blatt Papier wird zum Schächtelchen.

a) Für welches x erhalten wir eine möglichst voluminöse Schachtel, wenn $l=4b$ ist?

Wir haben uns für ein passendes $x=d$ größer 0 entschieden. Dieses bleibt nun fest, ebenso wie der Umfang des Rechtecks.

b) Bei welchem Verhältnis der Rechtecksseiten zueinander erhalten wir dann das Schächtelchen mit dem maximalen Volumen?

c) Das gleiche Spiel noch einmal, diesmal bleibt aber die Fläche des Rechtecks neben $x = d$ fest. Wann liegt nun das Schächtelchen mit möglichst großem Volumen vor?

Es sei nun $l = 3b$. Damit die Schachtel gut getragen werden kann, soll $\frac{b}{4} \leq x \leq \frac{b}{3}$ gewählt werden.

d) Wann erhalten wir jetzt eine vom Volumen her möglichst große Schachtel?

Es seien abschließend wieder alle möglichen x zugelassen, es ist aber immer noch $l = 3b$.

e) Für welches b liegt das maximale Volumen für $x = 17$ LE (= Längeneinheiten) vor? Wie groß ist dieses dann?

Aufgabe A10 (Abschnittsweise definierte Funktionen):

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3mx + 3m + 1 & x \geq 3, \\ nx^2 - 2nx + 1 & x < 3. \end{cases}$$

Für welche $m, n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion stetig und differenzierbar?