Mathematik 2 – MB – Übungsblatt 2

*****LÖSUNGEN*****

Themen:

Reihen, Konvergenz, Differentialrechnung

Umfang:	10 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Konvergenz und Grenzwert):

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Wert der jeweiligen Reihe:

a) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n\right)$ und $i^2=-1$

Lösungen:

a) Hier liegen Teleskopsummen vor, womit die Reihe konvergiert. Der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1.$$

b) Hier liegt eine geometrische Reihe vor, eben mit komplexen Zahlen. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese (wegen des kleineren Betrages im Zähler). Damit erhalten wir

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^k\right)=\frac{1-\left(\frac{3+4i}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{3+4i}{6}}$$

In der Exponentialform sehen wir leicht, dass $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n=0$ ist und daher der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3+4i}{6}\right)^{n+1}}{6-3-4i}\cdot 6=\frac{1}{6-3-4i}\cdot 6=\frac{6}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{18}{25}+\frac{24}{25}i$$

ist.

Aufgabe A2 (Nur Konvergenz):

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Ein Grenzwert ist gegebenenfalls nicht anzugeben.

a) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}\right)$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}\right)$

c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+3)}{n!}\right)$

Lösungen:

a) Da $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+n}$ für alle $n \geq 1$ und die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert, konvergiert die gegebene Reihe nach dem Majorantenkriterium ebenfalls.

b) Es ist $\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^3}} \to 3$ für $n \to \infty$, womit die Reihe nach dem Wurzelkriterium nicht konvergiert.

c) Es ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+3)\cdot(2n+5)}{(n+1)!} : \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+3)}{n!} = \frac{2n+5}{n+1} > 1$, womit die Reihe nach dem Quotientenkriterium nicht konvergiert.

Aufgabe A3 (Dreiecke):

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a. Nun konstruieren wir ein neues Dreieck, das wieder gleichseitig ist und als Kantenlänge die Höhe des vorangegangenen Dreiecks besitzt. Wir wiederholen diesen Vorgang iterativ.

Wie groß sind dann der Gesamtflächeninhalt und der Gesamtumfang aller Dreiecke zusammen?

Lösungen:

Ist die Seitenlänge a, so ist die Höhe $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, womit sich bei einem Dreieck mit dieser Seitenlänge gerade die Höhe $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{3}{4}a$ ergibt usw. Der Umfang ist dann $3a + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a + 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a + \ldots$. Mit dem Summenzeichen notieren wir

$$\sum_{k=0}^{n}\left(3a\cdot\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\right)=3a\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\right).$$

Es liegt also eine geometrische Reihe vor. Deren Grenzwert (existiert, da die Basis kleiner als 1 ist) berechnen wir mit Hilfe von

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-3}=4+2\sqrt{3}.$$

Damit ist $\left(4+2\sqrt{3}\right)\cdot 3a$ der gesamte Umfang aller Dreiecke.

Der Flächeninhalt ergibt sich basierend auf der Formel $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, wobei x die jeweilige Seitenlänge des jeweils aktuellen Dreiecks ist. Stellen wir wieder die Formel wie oben auf, so ergibt sich $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2a\right)^2+\ldots$. Mit dem Summenzeichen schreiben wir erneut mit $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ eine geometrische Reihe nieder, wobei sich $\frac{3}{4}$ aus $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ergibt. Der Grenzwert ist dann mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

den Grenzwert $4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2$ für den Gesamtflächeninhalt alle Dreiecke zusammen.

Aufgabe A4 (Etwas Altes – Gleichungen lösen – Substitution I):

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $x^4-5x^2=-6$

b) $x^4-5x^2=6$

c) $x^8-3x^4=4$

Lösungen:

a) $x^4-5x^2=-6\Rightarrow u^2-5u+6=0\Rightarrow u_{1/2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}\Rightarrow u_1=3;u_2=2$.

Wurzel ziehen als Rücksubstitution ergibt $x_{1/2}=\pm\sqrt{3};x_{3/4}=\pm\sqrt{2}$.

b) $x^4 - 5x^2 = 6 \Rightarrow u^2 - 5u - 6 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow u_1 = 6; u_2 = -1$.

Wurzel ziehen als Rücksubstitution ergibt wegen der negativen Lösung nur die beiden Werte $x_{1/2} = \pm\sqrt{6}$.

c) $x^8 - 3x^4 = 4 \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 4; u_2 = -1$.

Wurzel ziehen als Rücksubstitution ergibt wegen der negativen Lösung nur die beiden Werte $x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$.

Aufgabe A5 (Substitution II):

Lösen Sie die angegebenen Gleichungen.

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\left(2\sqrt{x} - 3\right) + 3 = \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{9}$

c) $e^{x-1} + 1 = 2e^{1-x}$

d) $\left(\ln(x)\right)^2 - 4 \cdot \ln(x) = -1$

Lösungen:

a) Wir setzen $u := x^2$ und erhalten dadurch die Gleichung

$$u^2 - 3u + 2 = 0 .$$

Diese lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$u_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} .$$

Wir erhalten die beiden Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$. Durch die Rücksubstitution $x = \pm\sqrt{u}$ folgen hiermit alle Lösungen der eigentlichen Gleichung:

$$x_{1/2} = \pm 1 \text{ und } x_{3/4} = \pm\sqrt{2} .$$

b) Nach der linken Seite der Gleichung müssen wir $x \geq 0$ fordern. Da $\sqrt{x}$ auf der rechten Seite auch im Nenner zu finden ist, muss sogar $x > 0$ sein. Da $\sqrt{9} = 3$, erhalten wir durch die Subtraktion der Zahl 3 den Ausdruck

$$2\sqrt{x}-3=\frac{2}{\sqrt{x}}\underset{\cdot\sqrt{x}}{\Leftrightarrow}2x-3\sqrt{x}=2\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}-2=0\,.$$

Wir setzen nun $u:=\sqrt{x}$ und es folgt, dass

$$2u^2-3u-2=0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$u_{1/2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}\,.$$

Damit finden wir die Lösungen $u_1=-\frac{1}{2}$ und $u_2=2$. Da die Wurzel einer Zahl als positiv definiert ist, folgt aus $u^2=x$ nur die Lösung $x_1=4$ für unsere Gleichung. Die Probe (= Einsetzten der Lösung in die Gleichung) bestätigt diese Lösung als echte Lösung.

c) Da $e^{f(x)}>0$ ist für alle x, können wir ohne Einschränkungen mit den e-Termen multiplizieren. Es ist

$$e^{x-1}+1=2e^{1-x}\Leftrightarrow e^{x-1}+1=2e^{-(x-1)}\Leftrightarrow e^{x-1}+1=\frac{2}{e^{x-1}}\,.$$

Wir multiplizieren mit e^{x-1} durch und stellen die Gleichung noch etwas um und erhalten dadurch

$$\underbrace{e^{2x-2}}_{=e^{x-1}\cdot e^{x-1}}+e^{x-1}-2=0\,.$$

Wir substituieren $u:=e^{x-1}$ und es folgt hiermit

$$u^2+u-2=0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel ergibt sich

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Die Lösungen sind also $u_1 = -2$ und $u_2 = 1$. Die Rücksubstitution lautet $\ln(u) + 1 = x$. Da der Numerus (hier: u) positiv und nicht 0 sein muss, erhalten wir lediglich die Lösung $x_1 = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

d) Der Numerus muss größer als 0 sein, d.h. die Definitionsmenge ist hier $D = (0; \infty)$. Um $(\ln(x))^2 - 4 \cdot \ln(x) = -1$ zu lösen, setzen wir $u := \ln(x)$. Damit erhalten wir

$$u^2 - 4u = -1 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0.$$

Wir jagen die Mitternachtsformel auf die Gleichung:

$$u_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Die Rücksubstitution mit $e^u = x$ liefert die Lösungen $x_1 = e^{2-\sqrt{3}}$ und $x_2 = e^{2+\sqrt{3}}$. Beide liegen innerhalb des Definitionsbereichs der Gleichung.

Aufgabe A6 (Funktionsbetrachtungen):

g sei eine zweimal differenzierbare Funktion mit $g(x) \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn x_1 Nullstelle der Ableitungsfunktion von g ist, dann ist x_1 auch Nullstelle der Ableitungsfunktion von h mit

$$h(x) = \frac{5g(x) - 4}{g(x) + 1}.$$

Nun sei x_2 eine Wendestelle von g **und** h. Welche Steigung hat dann die Tangente im zugehörigen Wendepunkt des Schaubildes von g?

Lösung:

Mit Hilfe der Quotientenregel ergibt sich

$$h'(x) = \frac{5g'(x)\cdot(g(x)+1) - g'(x)\cdot(5g(x)-4)}{[g(x)+1]^2} = g'(x)\cdot\frac{5\cdot(g(x)+1)-(5g(x)-4)}{[g(x)+1]^2}$$
$$= g'(x)\cdot\frac{9}{[g(x)+1]^2}.$$

Da $g'(x_1)=0$, folgt auch $h'(x_1)=0\cdot\mathrm{Rest}=0$. Dies war zu zeigen.

Nun wissen wir, dass $g''(x_2)=h''(x_2)=0$ sein soll. Wir bilden die zweite Ableitung von h:

$$h''(x) = \frac{9g''(x)\cdot[g(x)+1]^2 - 2[g(x)+1]\cdot g'(x)\cdot 9g'(x)}{[g(x)+1]^4} = \frac{9g''(x)\cdot[g(x)+1] - 18[g'(x)]^2}{[g(x)+1]^3}.$$

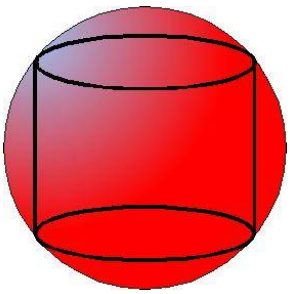
Nun setzen wir die Voraussetzung ein:

$$h''(x_2) = \frac{9\overbrace{g''(x_2)}^{=0}\cdot[g(x_2)+1] - 18[g'(x_2)]^2}{[g(x_2)+1]^3} = 0 \Rightarrow g'(x_2)=0.$$

Dies ist der gesuchte Steigungswert.

Aufgabe A7 (Extremwertproblem):

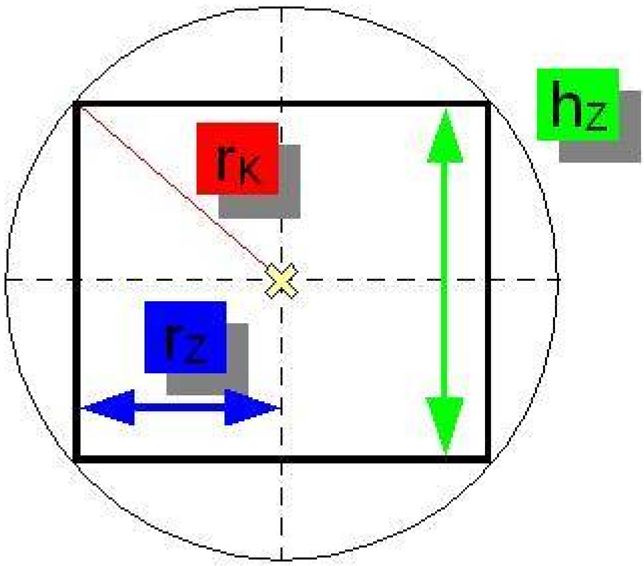
Einer Kugel K mit dem gegebenen Radius r_K werde ein Zylinder einbeschrieben (siehe Figur 1). Wie sind die Höhe h_Z und der Radius r_Z des Zylinders in Abhängigkeit von r_K zu wählen, damit der Mantel des Zylinders maximal wird?



Figur 1: Kugel mit einbeschriebenem Zylinder.

Lösung:

Da sowohl der Zylinder, als auch die Kugel rotationssymmetrisch sind, können wir uns eine zweidimensionale Skizze anfertigen, die alle notwendigen Informationen enthält (siehe Figur 2).



Figur 2: Zylinder und Kugel von der Seite betrachtet.

Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O_Z = \underbrace{2\pi r_Z h_Z}_{\text{Mantelfläche}} .$$

Momentan haben wir noch zwei Unbekannte in dieser Gleichung. Das wollen wir nun ändern. Mit Hilfe von Figur 2 können wir sehen, dass

$$r_Z^2 + \left(\frac{h_Z}{2}\right)^2 = r_K^2 \Leftrightarrow r_Z^2 = r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2 .$$

Durch die gegebenen Bedingungen gilt, dass $0 \le h_Z \le 2r_K$. Des weiteren ist $r_K > 0$. Wir setzen nun ein und erhalten

$$O_Z(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} \cdot h_Z .$$

Diese Funktion leiten wir ab und setzen die Ableitung gleich 0.

$$O_Z'(h_Z) = 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - 2\pi \frac{h_Z}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} \cdot \frac{1}{2}h_Z$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2} - \pi \frac{h_Z^2}{2\sqrt{r_K^2 - \frac{1}{4}h_Z^2}} = 0.$$

Wir dividieren anschließend durch π und multiplizieren mit dem Wurzelterm durch. Damit ergibt sich

$$2\cdot\left(r_K^2-\frac{1}{4}h_Z^2\right)-\frac{h_Z^2}{2}=0 \Leftrightarrow 2r_K^2-h_Z^2=0 \Leftrightarrow 2r_K^2=h_Z^2 .$$

Indem wir die Wurzel ziehen, erhalten wir $h_Z=\sqrt{2}\cdot r_K$. Mit der zweiten Ableitung, welche da ist

$$O_Z''(h_Z)=\frac{2\pi h_Z\cdot\left(h_Z^2-6r_K^2\right)}{\sqrt{\left(4r_K^2-h_Z^2\right)^3}},$$

sehen wir, dass wegen

$$O_Z''\left(\sqrt{2}\cdot r_K\right)=-4\pi r_K<0$$

wirklich ein Maximum vorliegt. Da die Randwerte $h_{Z,R1}=0$ und $h_{Z,R2}=2r_K$ beide die Mantelfläche 0 liefern, liegt wirklich das gesuchte, globale Maximum vor. Es sind also

$$h_Z=\sqrt{2}\cdot r_K \text{ und } r_Z=\sqrt{r_K^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\cdot r_K\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_K .$$

Anmerkung: Damit ist der Zylinder in der Seitansicht (Figur 2) ein Quadrat.

Aufgabe A8 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit):

Gegeben sei die folgende, abschnittsweise definierte Funktion f mit

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot e^x+2 & x\le 0,\\ ax^2+b & x>0.\end{cases}$$

Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit die Funktion f

a) stetig
b) differenzierbar

ist?

Lösung:

a) <u>Stetigkeit</u>

Es ist $f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, also $c \cdot e^0 + 2 = a \cdot 0^2 + b \Leftrightarrow c + 2 = b$. Das ist die gesuchte Beziehung. Der Parameter a kann beliebig gewählt werden.

b) <u>Differenzierbarkeit</u>

Es ist

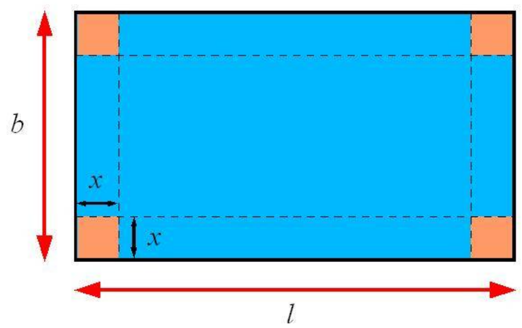
$$f'(x) = \begin{cases} c \cdot e^x & x \leq 0, \\ 2ax & x > 0. \end{cases}$$

Wir fordern also zusätzlich zu a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$, also $c \cdot e^0 = 2 \cdot a \cdot 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Damit ist $b = 2$, aber a kann nach wie vor beliebig gewählt werden.

Aufgabe A9 (Von Schachteln und Kisten, Extremwertaufgaben mit Randwerten):

Wir interessieren uns im Folgenden für Verpackungen und hier speziell für Schachteln. Diese lassen sich durch entsprechendes Einschneiden kleiner Quadrate in einen rechteckiges/n Papier/Karton herstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) sei $l \geq b$. Eine Skizze hierzu sehen wir in Figur 2.



Figur 2: Eine Blatt Papier wird zum Schächtelchen.

a) Für welches x erhalten wir eine möglichst voluminöse Schachtel, wenn $l = 4b$ ist?

Wir haben uns für ein passendes $x = d$ größer 0 entschieden. Dieses bleibt nun fest, ebenso wie der Umfang des Rechtecks.

b) Bei welchem Verhältnis der Rechtecksseiten zueinander erhalten wir dann das Schächtelchen mit dem maximalen Volumen?

c) Das gleiche Spiel noch einmal, diesmal bleibt aber die Fläche des Rechtecks neben $x = d$ fest. Wann liegt nun das Schächtelchen mit möglichst großem Volumen vor?

Es sei nun $l = 3b$. Damit die Schachtel gut getragen werden kann, soll $\frac{b}{4} \le x \le \frac{b}{3}$ gewählt werden.

d) Wann erhalten wir jetzt eine vom Volumen her möglichst große Schachtel?

Es seien abschließend wieder alle möglichen x zugelassen, es ist aber immer noch $l = 3b$.

e) Für welches b liegt das maximale Volumen für $x = 17$ LE (= Längeneinheiten) vor? Wie groß ist dieses dann?

Lösung:

a) Wir suchen ein möglichst großes Volumen. Wir beachten, weil OBdA $l \ge b$ gilt, dass nur Werte $0 \le x \le b/2$ Sinn machen, da sonst gar keine Schachtel entsteht (Vergleiche Figur 1). Das Volumen der Schachtel ist

$$V(x) = (l - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x\,,$$

was wir mit Figur 1 erkennen können. Dieses gilt es nun zu maximieren. Wir bilden hierzu die erste Ableitung (zweifache Produktregel) der gefundenen Zielfunktion:

$$\begin{aligned} V'(x) &= -2(b-2x)x - 2(l-2x)x + (l-2x)(b-2x) \\ &= -2bx + 4x^2 - 2lx + 4x^2 + lb - 2lx - 2bx + 4x^2 \\ &= 12x^2 - 4(b+l)x + lb = 0. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Nullstellen mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{4(b+l) \pm \sqrt{16(b+l)^2 - 48lb}}{24} = \frac{4(b+l) \pm \sqrt{16b^2 - 16bl + 16l^2}}{24} \\ &= \underbrace{\frac{b + l \pm \sqrt{b^2 - bl + l^2}}{6}}_{(1)} \underset{l=4b}{=} \frac{5b \pm \sqrt{13b^2}}{6} = \frac{5b \pm \sqrt{13}b}{6}. \end{aligned}$$

Nach der am Anfang angestrengten Überlegung zu den möglichen Werten von x, haben wir

$$x = \frac{5-\sqrt{13}}{6}b$$

zu wählen. Setzen wir dies in die zweite Ableitung

$$V''(x) = 24x - 4(b+4b) = 24x - 20b$$

ein, so erhalten wir

$$V''\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}b\right) \approx -14{,}4b < 0 \Rightarrow \text{ Maximum liegt vor.}$$

Da die Randwerte beide 0 sind, liegt also das gesuchte, globale Maximum vor.

b) Es gebe für $x = d$ ein Volumen

$$V = (l-2d)(b-2d)d\ .$$

Damit ist x nun nicht mehr die Laufvariable. Wir wissen zusätzlich, dass $2l + 2b = U$ fest bleibt. Damit ist

$$l = \frac{U}{2} - b\,.$$

Dies setzen wir in die Volumenformel ein und erhalten

$$V(b) = \left(\frac{U}{2} - b - 2d\right)(b-2d)d\ .$$

Wir leiten ab (Produktregel, Laufvariable ist b):

$$V'(b) = -(b-2d)d + \left(\frac{U}{2} - b - 2d\right)d = 0\,.$$

Wir lösen nach b auf (zuerst durch d teilen):

$$-b+2d+\frac{U}{2}-b-2d=0 \Rightarrow 2b=\frac{U}{2} \underset{U=2l+2b}{\Rightarrow} 2b=b+l \Rightarrow l=b\,.$$

Die Seiten haben das Verhältnis $1:1$ zueinander, es liegt also ein Quadrat vor.

c) Analoge Vorgehensweise wie in Aufgabenteil b): Es gebe für $x=d$ ein Volumen

$$V=(l-2d)(b-2d)d\,.$$

Damit ist x nun nicht mehr die Laufvariable. Wir wissen zusätzlich, dass nun $l\cdot b=A$ fest bleibt. Damit ist

$$l=\frac{A}{b}.$$

Dies setzen wir in die Volumenformel ein und erhalten

$$V(b)=\left(\frac{A}{b}-2d\right)(b-2d)d\,.$$

Wir leiten ab (Produktregel, Laufvariable ist b):

$$V'(b)=-\frac{A}{b^2}(b-2d)d+\left(\frac{A}{b}-2d\right)d=0\,.$$

Wir lösen nach b auf (zuerst durch d teilen) und setzen $A=l\cdot b$ wieder ein:

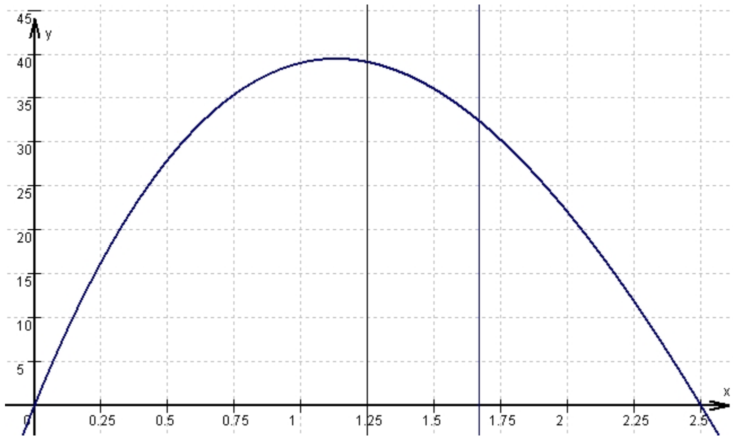
$$-\frac{lb}{b^2}(b-2d)=-\frac{lb}{b}+2d \Rightarrow l-2d\frac{l}{b}=l-2d \Rightarrow \frac{l}{b}=1\,.$$

Die Seiten haben wieder das Verhältnis $1:1$ zueinander, es liegt also ein weiteres Mal ein Quadrat vor.

d) Wir nehmen Gleichung (1) her und erhalten

$$x_E=\frac{b+l-\sqrt{b^2-bl+l^2}}{6}\underset{l=3b}{=}\frac{4b-\sqrt{7b^2}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{6}b\,.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung zeigt, dass es ein Maximum ist. Es liegt allerdings nicht innerhalb des vorgegebenen Intervalls für x, da $x_E = 0{,}2257081148 \cdot b$ (siehe Figur 2).



Figur 2: Beispiel zu dem im Text Gesagten mit $b = 5$ und $l = 15$.

Deswegen haben wir nun die Randwerte zu berechnen und diese sind

$$V\left(\frac{b}{4}\right) = \left(b - 2\frac{b}{4}\right)\left(3b - 2\frac{b}{4}\right)\frac{b}{4} = 0{,}3125b^3,$$

und

$$V\left(\frac{b}{3}\right) = \left(b - 2\frac{b}{3}\right)\left(3b - 2\frac{b}{3}\right)\frac{b}{3} = 0,\overline{259}b^3.$$

Damit liegt das Maximum für $x = \frac{b}{4}$ vor, denn innerhalb des Intervalls kann es keinen größeren Wert geben, sonst hätten wir ihn mit der ersten Ableitung gefunden (Wer es ganz genau haben will, kann eine Monotonieuntersuchung durchführen!).

e) Wir hatten in d)

$$x_E = \frac{b + l - \sqrt{b^2 - bl + l^2}}{6} \underset{l=3b}{=} \frac{4b - \sqrt{7b^2}}{6} = \frac{4 - \sqrt{7}}{6} b$$

berechnet. Für $x_E = x = 17$ LE folgt damit

$$b = \frac{6x}{4-\sqrt{7}} = \frac{6\cdot 17}{4-\sqrt{7}} \approx 75{,}3185 \text{ LE.}$$

Mit $l = 3b \approx 225{,}9555$ LE, erhalten wir dann mit

$$V \approx 134832{,}4 \text{ VE (= Volumeneinheiten)}$$

das gesuchte Volumen.

Aufgabe A10 (Abschnittsweise definierte Funktionen):

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3mx + 3m + 1 & x \geq 3, \\ nx^2 - 2nx + 1 & x < 3. \end{cases}$$

Für welche $m, n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion stetig und differenzierbar?

Lösung:

Hier muss gelten, dass

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = f(3) \text{ und } \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f'(x).$$

Die erste Bedingung liefert $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \left(nx^2 - 2nx + 1\right) = 9n - 6n + 1 = 3n + 1 = 9m + 3m + 1 = 12m + 1$.

Es ist also $3n = 12m \Rightarrow n = 4m$. Die zweite Bedingung liefert, wenn wir

$$f'(x) = \begin{cases} 3m & x \geq 3, \\ 2nx - 2n & x < 3, \end{cases}$$

verwenden, den Term $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f'(x) = 6n - 2n = 4n = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f'(x) = 3m$. Es ist also $3m = 4n$.

Setzen wir die zweite Bedingung in die erste ein, so sehen wir letztendlich, dass $m = n = 0$ sein muss, und somit die gesuchte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3, \\ 1 & x < 3, \end{cases} = 1$$

ist.