DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Stuttgart

Mathematik 1 – MB – Übungsblatt 1

Termin 02 – Lösungen

Themen:

Komplexe Zahlen *(6 Aufgaben)*

Aufgabe 1 (Komplexe Grundlagen):

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der algebraischen/kartesischen Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

a) $(2+3i)\cdot(1+4i)$

b) $(4-3i)\cdot\left(\sqrt{2}+i\right)$

c) $\left(9-\sqrt{5}i\right)\cdot\left(9+\sqrt{5}i\right)-(2+9i)^2$

d) $\dfrac{2+i}{1-i}$

e) $9+i-(2+i)^2-\dfrac{1-i}{1+i}$

f) $\left(\dfrac{1-i}{i}\right)^2-\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$

g) $(2-2i)^2+(2+2i)^3-i^4$

h) $\sum\limits_{k=1}^{5}\left(k\cdot i^k\right)$

i) $\prod\limits_{k=1}^{7}\left(k\cdot i^k\right)$

j) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k\cdot i)$

Lösung:

a) $(2+3i)\cdot(1+4i) = 2\cdot 1+2\cdot 4i+3i\cdot 1+3\cdot 4\cdot i^2 = 2+8i+3i-12 = -10+11i$

b) $(4-3i)\cdot\left(\sqrt{2}+i\right) = 4\sqrt{2}+4i-3\sqrt{2}i-3i^2 = \left(4\sqrt{2}+3\right)+\left(4-3\sqrt{2}\right)i$

c) $\left(9-\sqrt{5}i\right)\cdot\left(9+\sqrt{5}i\right)-(2+9i)^2 = 9^2-\left(\sqrt{5}i\right)^2-2^2-2\cdot 2\cdot 9i-(9i)^2 = 81+5-4-36i+81$

$= 163-36i$

d) $\dfrac{2+i}{1-i} = \dfrac{2+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{2+i+2i+i^2}{1+1} = \dfrac{2-1+3i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

e) $9+i-(2+i)^2-\dfrac{1-i}{1+i} = 9+i-2^2-2\cdot 2i-i^2-\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i} = 5-3i+1-\dfrac{1-2i+\overbrace{i^2}^{-1}}{1+1} =$

$= 6-3i-\dfrac{-2i}{2} = 6-2i$

f) $\left(\dfrac{1-i}{i}\right)^2-\dfrac{1+i}{(1-i)^2} = \dfrac{(1-i)^2}{i^2}-\dfrac{1+i}{1-2i+i^2} = \dfrac{1-2i+i^2}{-1}-\dfrac{1+i}{-2i} = \dfrac{-2i}{-1}+\dfrac{1+i}{2i}\cdot\dfrac{i}{i} = 2i+\dfrac{i+i^2}{2i^2} =$

$= 2i+\dfrac{i-1}{-2} = 2i-\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

g) $(2-2i)^2+(2+2i)^3-i^4 = 2^2-2\cdot 2\cdot 2i+(2i)^2+2^3+3\cdot 2^2\cdot 2i+3\cdot 2\cdot(2i)^2+(2i)^3-\overbrace{(-1)\cdot(-1)}^{i^2\cdot i^2} =$

$= 4-8i-4+8+24i-24-8i-1 = -17+8i$

h) $\sum_{k=1}^{5}\left(k\cdot i^k\right)=1i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5=i-2-3i+4+5i=2+3i$

i) $\prod_{k=1}^{7}\left(k\cdot i^k\right)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot i^{(1+2+3+4+5+6+7)}=5040\cdot i^{28}=5040\cdot\underbrace{\left(i^4\right)}_{=1}^{7}=5040$

j) $\sum_{k=0}^{n}(k\cdot i)=i\cdot\sum_{k=0}^{n}k \underset{Summenformel}{=} \frac{n(n+1)}{2}i$

Aufgabe 2 (Komplexe Beweisle):

Beweisen Sie unter Verwendung der algebraischen/kartesischen Form die folgenden Beziehungen. Es sind dabei $x, y, z \in \mathbb{C}$.

a) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

b) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$

c) $\overline{x\cdot y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$

d) $\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}^2\right)=0$

e) $\operatorname{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)=0$

Lösung:

a) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Wie berechnen $|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$. Des Weiteren ist $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)$ $=a^2-abi+abi-(bi)^2=a^2+b^2=|z|^2$. Dies war zu zeigen.

b) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$

Es sei $x=a+bi$ und $y=c+di$. Damit folgt $x+y=(a+c)+(b+d)i$ und damit ist dann $\overline{x+y}=(a+c)-(b+d)i$. Weiterhin ist $\bar{x}+\bar{y}=a-bi+c-di=(a+c)-(b+d)i=\overline{x+y}$, was zu zeigen war.

c) $\overline{x\cdot y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$

Es sei $x=a+bi$ und $y=c+di$. Damit ist dann

$$x\cdot y=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

und damit folgt $\overline{x\cdot y}=(ac-bd)-(ad+bc)i$. Wir rechnen nun

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=(a-bi)\cdot(c-di)=ac-adi-bci-bd=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{x\cdot y}.$$

Dies war zu zeigen.

d) $\mathrm{Re}\left(z^2-\bar{z}^2\right)=0$

Es ist

$$\mathrm{Re}\left(z^2-\bar{z}^2\right)=\mathrm{Re}\left((a+bi)^2-(a-bi)^2\right)=\mathrm{Re}\left(a^2+2abi-b^2-a^2+2abi+b^2\right)$$
$$=\mathrm{Re}(4abi)=0.$$

e) $\mathrm{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)=0$

Es ist

$$\mathrm{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)=\mathrm{Im}\left((a+bi)^2+(a-bi)^2\right)=\mathrm{Im}\left(a^2+2abi-b^2+a^2-2abi-b^2\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(2a^2-2b^2\right)=0.$$

Aufgabe 3 (algebraische/kartesische Form):

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $w=\frac{1+i}{1-i}\cdot\left(2i+\sqrt{2}\right)$.

Geben Sie damit die trigonometrische Form von $\overline{w}$ an und bestimmen Sie alle 5-ten Wurzeln hiervon.

Lösung:

Wir ergänzen zu Beginn und nutzen die dritte Binomische Formel aus:

$$w=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\cdot\left(2i+\sqrt{2}\right)=\frac{1+2i+i^2}{1+1}\cdot\left(2i+\sqrt{2}\right)=\frac{2i}{2}\cdot\left(2i+\sqrt{2}\right)=-2+\sqrt{2}\cdot i\,.$$

Die trigonometrische Form ergibt sich mit den in der Vorlesung behandelten Formeln. Es sind

$$\arctan\frac{\sqrt{2}}{-2}+180°\approx 144{,}74° \text{ und } |w|=\sqrt{(-2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}\,.$$

Also sind $w=\sqrt{6}\cdot\left(\cos 144{,}74°+i\cdot\sin 144{,}74°\right)$ und $\overline{w}=\sqrt{6}\cdot\left(\cos 144{,}74°-i\cdot\sin 144{,}74°\right)$. Letztere Zahl wollten wir berechnen. Damit können wir die fünften Wurzeln angeben. Diese lauten nach dem in der Vorlesung Gesagten:

$$z_0=\sqrt[10]{6}\cdot\left(\cos\frac{144{,}74°}{5}-i\cdot\sin\frac{144{,}74°}{5}\right)$$
$$z_1=\sqrt[10]{6}\cdot\left(\cos\frac{144{,}74°+1\cdot 360°}{5}-i\cdot\sin\frac{144{,}74°+1\cdot 360°}{5}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[10]{6} \cdot \left(\cos \frac{144{,}74° + 2 \cdot 360°}{5} - i \cdot \sin \frac{144{,}74° + 2 \cdot 360°}{5} \right)$$
$$z_3 = \sqrt[10]{6} \cdot \left(\cos \frac{144{,}74° + 3 \cdot 360°}{5} - i \cdot \sin \frac{144{,}74° + 3 \cdot 360°}{5} \right)$$
$$z_4 = \sqrt[10]{6} \cdot \left(\cos \frac{144{,}74° + 4 \cdot 360°}{5} - i \cdot \sin \frac{144{,}74° + 4 \cdot 360°}{5} \right)$$

Damit sind wir fertig.

Aufgabe 4 (Einheitswurzeln):

Gegeben sei eine komplexe Unbekannte z. Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 1$. Zeichnen Sie die dadurch erhaltenen 6-ten Einheitswurzeln in eine Gaußsche Zahlenebene passender Größe (dass man halt etwas sieht!) ein. Begründen Sie, dass hierdurch ein regelmäßiges Sechseck entstanden ist. Wie lang sind seine Kanten?

Lösung:

Gesucht sind die sechs 6-ten Wurzel aus der Zahl 1. Wir schreiben

$$1 = e^{i \cdot 0} = |1| \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0).$$

Damit können wir nun die Wurzeln ziehen. Es sind:

1.) $z_0 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{0 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{0 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = 1$

2.) $z_1 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{1 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{1 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

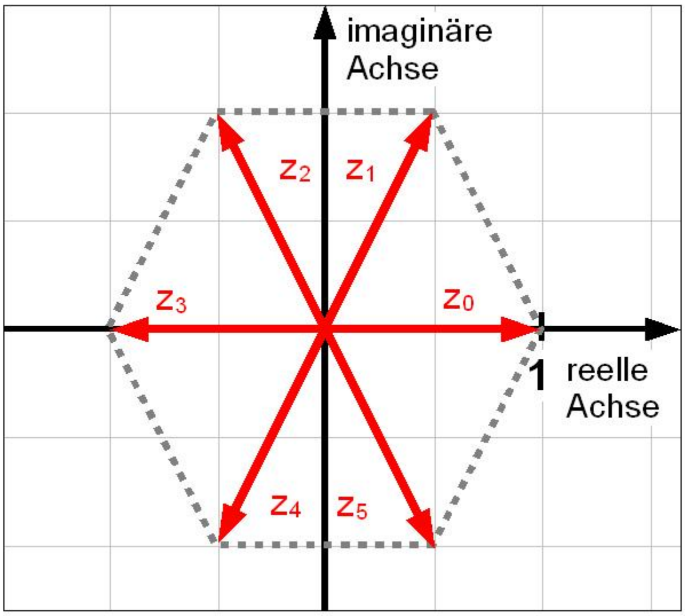
3.) $z_2 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{2 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{0 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.) $z_3 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{3 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{3 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = -1$

5.) $z_4 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{4 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{4 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.) $z_5 = \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos\left(0 + \frac{5 \cdot 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(0 + \frac{5 \cdot 2\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

In der Gaußschen Zahlenebene sieht das wie folgt aus:



Figur 1: Sechseck in der Gaußschen Zahlenebene.

Das es sich um ein regelmäßiges Sechseck handelt, lässt sich dadurch begründen, dass alle Zeiger gleich lang sind (Länge 1) und jeweils einen Winkel von $60°$ einschließen, was sich aus der Wurzelberechnung ergibt. Damit hat dann auch das Sechseck die Kantenlänge 1, da es sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

Aufgabe 5 (Additionstheoreme):

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass dank der komplexen Zahlen folgende Zusammenhänge bestehen:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ und } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Zeigen Sie hiermit die folgenden Zusammenhänge:

a) $2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos x + \cos y$

b) $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin(3x)$

c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

Lösung:

a) Wir schreiben die linke Seite mit den gegebenen Zusammenhängen um. Es ist dann:

$$2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=2\cdot\frac{e^{i\frac{x+y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{e^{i\frac{x+y}{2}}\cdot e^{i\frac{x-y}{2}}+e^{i\frac{x+y}{2}}\cdot e^{-i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}\cdot e^{i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}\cdot e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{e^{i\frac{2x}{2}}+e^{i\frac{2y}{2}}+e^{-i\frac{2y}{2}}+e^{-i\frac{2x}{2}}}{2}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\cos x+\cos y.$$

b) Gleiche Vorgehensweise wir in Aufgabenteil a):

$$3\sin x-4\sin^3 x=\sin(3x)=3\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-4\cdot\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3.$$

Rechnen wir nun z.B. mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks die rechte Seite aus, so erhalten wir unter Berücksichtigung der beiden Potenzgesetze Nummer 1 ($a^x\cdot a^y=a^{x+y}$) und Nummer 5 ($\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}$) den folgenden Ausdruck:

$$3\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-4\cdot\frac{e^{3ix}-3\cdot e^{2ix}\cdot e^{-ix}+3\cdot e^{ix}\cdot e^{-2ix}-e^{-3ix}}{(2i)^3}$$

$$=3\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-4\cdot\frac{e^{3ix}-3\cdot e^{ix}+3\cdot e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}=\frac{3e^{ix}-3e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{3ix}-3\cdot e^{ix}+3\cdot e^{-ix}-e^{-3ix}}{2i}$$

$$=\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}=\sin(3x).$$

Das war zu zeigen!

c) Und ein letztes Mal gehen wir wie bereits gezeigt vor. Dieses Mal nutzen wir die beiden ersten Binomischen Formeln aus:

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2ix}+2\cdot\overbrace{e^{ix}\cdot e^{-ix}}^{=1}+e^{-2ix}}{4}$$

$$+\frac{e^{2ix}-2\cdot\overbrace{e^{ix}\cdot e^{-ix}}^{=1}+e^{-2ix}}{4}=\frac{2e^{2ix}+2e^{-2ix}}{4}=\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}=\cos(2x).$$

Und wieder sind wir fertig!

Aufgabe 6 (Formelnachweis Exponentialform):

Weisen sie nach, dass die Exponentialform der konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ von $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ (mit den bekannten Größen aus der Vorlesung) gleich $\bar{z} = |z| \cdot e^{-i\varphi}$ lautet.

Lösung:

Wir können hier die Lösung über die trigonometrische und dann die algebraische Form finden. Es ist

$$\bar{z} = \overline{|z| \cdot e^{i\varphi}} = \overline{|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \overline{|z| \cdot \cos\varphi + |z| \cdot i\sin\varphi} = \overline{a+ib} = a - ib = |z| \cdot \cos\varphi - |z| \cdot i\sin\varphi$$
$$= |z| \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin(-\varphi)) = |z| \cdot (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z| \cdot e^{-i\varphi}.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass der Sinus eine punkt- und der Kosinus eine achsensymmetrische Funktion ist, d.h. $-\sin x = \sin(-x)$ und $\cos x = \cos(-x)$.