Mathematik 2 – WIW – Übungsblatt 1

*****LÖSUNGEN*****

Themen:

Folgen, Reihen, Grenzwerte, Monotonie

Umfang:	7 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Monotonie und Beschränktheit bei Folgen):

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen.

a) (a_n) mit $a_n = \frac{n-1}{n^2-1}$ b) (b_n) mit $b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ c) (c_n) mit $c_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

d) (d_n) mit $d_n = 2^{2+\frac{1}{n}}$ e) (e_n) mit $e_n = \frac{2^n+2^{-n}}{3^n}$ f) (f_n) mit $f_n = \frac{n^2-1}{2\cdot(n+1)^2}$

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie. Es gilt, solange nichts anderes notiert ist, dass $n \in \mathbb{N}$.

g) (g_n) mit $g_n = 2^n-(n-1)^2$ h) (h_n) mit $h_n = \frac{2\cdot(n+3)^2+1}{2^n}$

i) (i_n) mit $i_n = \frac{5n^3+n^2}{n^2+1}$ j) (j_n) mit $j_n = n^2+(-1)^n\cdot n+1$

k) (k_n) mit $k_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ l) (l_n) mit $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot n$

Lösungen:

a) Da der Grad oben kleiner als der Grad unten ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2-1} = 0,$$

oder wir rechnen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

b) Mit Hilfe der dritten Binomischen Formel ist

$$b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Nun ist leicht ersichtlich, dass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

c) Wieder ist der Grad unten größer. Für $c_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$ rechnen wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} - 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

d) Hier ist nur der Exponent interessant. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} 2^{2+\frac{1}{n}} = 2^{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = 2^2 = 4 .$$

e) Ein wenig Umformen zeigt uns hier den Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{-n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\cdot 2^n} = 0 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^n} = 0.$$

f) Der Grad ist hier oben und unten gleich, somit ist der Grenzwert der Quotient aus den Leitkoeffizienten.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

g) Wie wenden das Differenzenkriterium an:

$$g_{n+1} - g_n = 2^{n+1} - n^2 - 2^n + (n-1)^2 = 2^{n+1} - 2^n - 2n + 1 = 2^n\cdot(2-1) - 2n + 1$$
$$= 2^n - 2n + 1$$

Da $2^n \geq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $g_{n+1} - g_n > 0$ und damit die Folge streng monoton wachsend.

h) Hier nehmen wir das Quotientenkriterium

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2^{n+1}} : \frac{2\cdot(n+3)^2+1}{2^n} = \frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2\cdot(n+3)^2+1}$$
$$= \frac{2\cdot(n+4)^2+1}{2\cdot\left(\sqrt{2}n+3\sqrt{2}\right)^2+2} < 1.$$

Da der Nenner immer größer als der Zähler ist, beide aber positiv sind, ergibt sich immer ein positiver Quotient kleiner als 1. Damit fällt die Folge streng monoton.

i) Wir formen etwas um:

$$i_n = \frac{5n^3 + n^2}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2+1} \cdot (5n+1).$$

Da

$$\frac{n^2}{n^2+1} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \text{ und } 5n+1 < 5(n+1)+1,$$

muss $i_{n+1} > i_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Die Folge wächst also streng monoton.

j) Wir verwenden das Differenzenkriterium:

$$j_{n+1} - j_n = (n+1)^2 + (-1)^{n+1} \cdot (n+1) + 1 - n^2 - (-1)^n - 1 = 2n + 1 - (-1)^n \cdot (n+1) - (-1)^n n$$
$$= 2n + 1 - 2 \cdot (-1)^n n - (-1)^n.$$

Ist n gerade, dann ist die Differenz der Folgenglieder gerade 0. Im anderen Fall ist sie $4n+2>0$. Damit wächst die Folge monoton.

k) Wir formen etwas um:

$$k_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Da $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $k_{n+1} < k_n$, womit die Folge streng monoton fällt.

l) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \left.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1) \middle/ \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n\right. = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

Damit fällt die Folge monoton für $n \geq 1$. Für $n > 1$ fällt sie sogar streng monoton.

□

Aufgabe A2 (Kredit zurückzahlen):

Ein zu Jahresbeginn gewährtes Bankdarlehen $S_0 = 200.000$ (in €) wird in festen Jahresbeiträgen von 10.000 € zurückgezahlt. Dieser Jahresbetrag ist am Ende eines jeden Jahres fällig und enthält den Zins und die Tilgung. Der Zins beträgt 4% von der das Jahr über vorhandenen Restschuld. S_n ist die Restschuld nach dem n-ten Jahr. Zeigen Sie, dass gilt:

$$S_n = S_0 \cdot 1{,}04^n - 10.000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \text{ mit } n \geq 1$$

Lösung:

Wir konzentrieren uns auf den Induktionsschritt und müssen zeigen, dass die Formel für $n+1$ in der Form gilt, dass wir überall in der obigen Formel n durch $n+1$ ersetzen können.

Es ist nun $S_{n+1} = 1{,}04 \cdot S_n - 10000$ nach der Aufgabenstellung. Wir formen um:

$$S_{n+1} = 1{,}04 \cdot \left(S_0 \cdot 1{,}04^n - 10.000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \right) - 10000 = S_0 \cdot 1{,}04^{n+1} - 1{,}04 \cdot 10.000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} - 10000$$

$$= S_0 \cdot 1{,}04^{n+1} - 10000 \cdot \left(1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} + 1 \right) = S_0 \cdot 1{,}04^{n+1} - 10000 \cdot \left(\frac{1{,}04^{n+1} - 1{,}04 + 0{,}04}{0{,}04} \right)$$

$$= S_0 \cdot 1{,}04^{n+1} - 10000 \cdot \left(\frac{1{,}04^{n+1} - 1}{0{,}04} \right).$$

Das Letzte wollten wir gerade zeigen und der Beweis ist fertig.

Aufgabe A3 (Entwicklung eines Kontostandes (rekursiv definierte Folge und vollständige Induktion)):

Herr Marx-Feuerbach betreibt mit seinem Konto, für welches er keine Zinsen bekommt, das folgende Spielchen:

Auf dem Konto sei zu Beginn kein Geld. Jeden Monat zahlt er nun 3000 € darauf ein und hebt anschließend sofort $20\,\%$ des vorhandenen Geldes ab.

a) Berechnen Sie die Kontostände nach der Durchführung seines Vorgehens für die ersten fünf Monate.

b) Stellen Sie eine rekursiv definierte Folge auf, durch welche sich der Kontostand sukzessive berechnen lässt.

c) Berechnen Sie den Kontostand, auf den sich sein Konto langfristig einpendelt.

d) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge der Kontostände durch die explizite Formel

$$K(n) = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^n\right) \text{ (mit } n = \{0,1,2,3,4,\ldots\} \text{ in Monaten)}$$

beschrieben wird.

Lösungen:

a) Wir geben die ersten fünf Monate in einer Tabelle an:

Monat	Kontostand in €
1	$(0+3000)\cdot 0{,}8 = 2400$
2	$(2400+3000)\cdot 0{,}8 = 4320$
3	$(4320+3000)\cdot 0{,}8 = 5856$
4	$(5856+3000)\cdot 0{,}8 = 7084{,}80$
5	$(7084{,}80+3000)\cdot 0{,}8 = 8067{,}84$

Anmerkung: Der Abzug von $20\,\%$ entspricht der Multiplikation mit $1-0{,}2=0{,}8$.

b) Nach unserer Vorgehensweise können wir folgende rekursiv definierte Folge aufstellen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= (a_{n-1}+3000)\cdot 0{,}8 \end{aligned}$$

mit $n=\{1,2,3,4,\ldots\}$.

c) Die langfristige Entwicklung des Kontostandes entspricht dem Grenzwert der Folge. Es ist nun aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = g\,.$$

Damit folgt aus unserer rekursiven Folge aus Aufgabenteil b), dass

$$\begin{aligned} g &= (g+3000)\cdot 0{,}8 \\ g &= 0{,}8g + 2400 && \big| -0{,}8g \\ 0{,}2g &= 2400 && \big| : 0{,}2 \\ g &= 12000 \end{aligned}.$$

Langfristig hat er also mit 12000€ auf dem Konto zu rechnen.

d) Wir beweisen die Formel mittels vollständiger Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u>

Es ist

$$K(0) = 12000\cdot\left(1-0{,}8^0\right) = 12000\cdot(1-1) = 0 = a_0\,.$$

Damit gelingt der Induktionsanfang.

Induktionsschritt:

Laut der Formel müsste

$$K(n+1) = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^{n+1}\right)$$

sein. Wir wissen, dass $a_{n+1} = (a_n + 3000) \cdot 0{,}8$ ist, also rechnen wir

$$\left(K(n) + 3000\right) \cdot 0{,}8 = \left(12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^n\right) + 3000\right) \cdot 0{,}8 = 12000 \cdot \left(0{,}8 - 0{,}8^{n+1}\right) + \underbrace{2400}_{3000 \cdot 0{,}8}$$
$$= \underbrace{9600}_{12000 \cdot 0{,}8} + 2400 - 12000 \cdot 0{,}8^{n+1} = 12000 - 12000 \cdot 0{,}8^{n+1} = 12000 \cdot \left(1 - 0{,}8^{n+1}\right) = K(n+1).$$

Damit gelingt auch der Induktionsschritt.

Induktionsschluss:

Da der Induktionsanfang gelingt und der Induktionsschritt den Schluss auf $n = 1,2,3,4,5,6,...$ zulässt, ist gezeigt, dass die Formel die Folge beschreibt.

Aufgabe A4 (Ratensparen):

Herr Mohnopolli hat mit seiner Bank, der Pleiteria, den folgenden Ratensparvertrag ausgehandelt. Er zahlt zu Beginn eines jeden Jahres 4000€ ein, welche dann mit 5% jährlich verzinst werden. Am Ende eines jeden Jahres, nach Eingang der Zinsen, sind dann 100 € Gebühren fällig, da die Bank versucht, ihre Managergehälter auf einem konstanten und unverschämt hohen Niveau zu halten. Dieser Betrag wird von dem vorhandenen Geld abgezogen. Der Vertrag läuft über fünf Jahre.

a) Wie viel Geld hat Herr Mohnopolli nach Ablauf der Zeit angespart?
b) Wie sieht es aus, wenn der Vertrag 15 Jahre (n Jahre) läuft?

Leider stellt sich kurz vor Beginn der Vertragslaufzeit heraus, dass es mit 100 € Gebühren nicht getan ist. Deswegen ist es notwendig, sie jedes Jahr um 10 € zu erhöhen.

c) Berechnen Sie Herr Mohnopollis Guthaben in den ersten fünf Jahren jeweils nach Abzug der Gebühren.

d) Wie viele Euro Gebühren muss er innerhalb von n Jahren an die Bank zahlen?

Lösungen:

a) Wir berechnen die Summe, welche er nach Ablauf der fünf Jahre angespart hat, indem wir für jedes Jahresende die jeweilige Sparsumme ermitteln.

Jahr	Sparsumme zum Jahresende in Euro
1	$S_1 = 4000 \cdot 1{,}05 - 100 = 4100$
2	$S_2 = (S_1 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 = 8405$
3	$S_3 = (S_2 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 = 12925{,}25$
4	$S_4 = (S_3 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 = 17671{,}51$
5	$S_5 = (S_4 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 = 22655{,}09$

b) Nun wollen wir eine Formel für sein Sparguthaben nach n Jahren finden. Hierfür betrachten wir noch mal unsere Rechnungen aus Aufgabenteil a). Schreiben wir z.B. das vierte Jahr explizit aus, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} S_4 &= (S_3 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 = ((S_2 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 \\ &= (((S_1 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 \\ &= (((4000 \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100 + 4000) \cdot 1{,}05 - 100. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck versuchen wir nun etwas zu sortieren. Multiplizieren wir die Klammern aus und ordnen die entstandenen Terme etwas, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} S_4 &= 4000 \cdot \left(1{,}05^4 + 1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05\right) - 100 \cdot \left(1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1\right) \\ &= 4000 \cdot \sum_{k=1}^{4} 1{,}05^k - 100 \cdot \sum_{k=0}^{3} 1{,}05^k. \end{aligned}$$

Hierdurch vermuten wir, dass die Summe nach dem n-ten Jahr gegeben ist durch

$$S_n = 4000 \cdot \sum_{k=1}^{n} 1{,}05^k - 100 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k .$$

Wir wissen nun, dass die n-te Partialsumme s_n der geometrischen Folge (a_n) mit $a_n = q_0 \cdot q^n$ und $n \in \mathbb{N}$ und $q > 0, q \neq 1$ gegeben ist durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q_0 q^k = q_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Damit können wir für S_n die folgende Vereinfachung durchführen:

$$S_n = 4000 \cdot \sum_{k=1}^{n} 1{,}05^k - 100 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k = 4000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^{k+1} - 100 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k$$
$$= 4000 \cdot 1{,}05 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k - 100 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k = (4200 - 100) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k$$
$$= 4100 \cdot \frac{1-1{,}05^n}{1-1{,}05}.$$

Hiermit haben wir die gesuchte Formel für den Sparbetrag S_n nach n Jahren gefunden. Es ist

$$S_n = 4100 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05} = 82000 \cdot (1{,}05^n - 1).$$

Nach 15 Jahren hat er somit $S_{15} = 88472{,}11$ € angespart.

c) Wir stellen wieder eine Tabelle wie in Aufgabenteil a) auf.

Jahr	**Sparsumme zum Jahresende in Euro**
1	$S_1 = 4000 \cdot 1{,}05 - 100 = 4100$
2	$S_2 = (S_1 + 4000) \cdot 1{,}05 - 110 = 8395$
3	$S_3 = (S_2 + 4000) \cdot 1{,}05 - 120 = 12894{,}75$
4	$S_4 = (S_3 + 4000) \cdot 1{,}05 - 130 = 17609{,}49$
5	$S_5 = (S_4 + 4000) \cdot 1{,}05 - 140 = 22549{,}96$

d) Die Gebühren G_n nach n Jahren sind

$$G_n = 100 + 110 + 120 + \ldots + \left(100 + (n-1)\cdot 10\right) = n \cdot 100 + 10 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k\,.$$

Hier können wir die Summenformel für die arithmetische Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

anwenden. Es ist dann

$$G_n = n \cdot 100 + 10 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k = 100n + 10 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \left(100 + 5(n-1)\right)\cdot n\,.$$

Dies ist die Formel für die Gebühren nach n Jahren.

□

Aufgabe A5 (Tilgung):

Herr Krösus hat mit der Bank seines Vertrauens, der Pecunia-Hortens, einen Kredit über eine Summe von 100000€ ausgehandelt, welchen er in jährlichen Raten, die jeweils zum Jahresende fällig sind, zurückzahlen möchte. Der Kredit wird am Jahresanfang zu einem Zinssatz von 5% aufgenommen. Die Zinsen sind jeweils ebenfalls am Jahresende fällig. Danach wir die Rate gezahlt.

a) Wie hoch muss die jährliche Tilgungsrate mindestens sein, wenn Herr Krösus den Kredit nach 15 Jahren abbezahlt haben möchte?

b) Wie hoch muss die jährliche Tilgungsrate sein, wenn Herr Krösus mit der Rate für das zehnte Jahr einen Sondertilgungsbetrag von 10000€ zahlt und trotzdem nach 15 Jahren den Kredit abbezahlt haben will?

Lösungen:

a) Wir berechnen die ersten vier Jahre (r ist die jährliche Rate):

Jahr	Summe in Euro
1	$S_1 = 100000 \cdot 1{,}05 - r$
2	$S_2 = S_1 \cdot 1{,}05 - r$
3	$S_3 = S_2 \cdot 1{,}05 - r$
4	$S_4 = S_3 \cdot 1{,}05 - r$

Schreiben wir nun z.B. das vierte Jahr ausführlich nieder, dann erhalten wir

$$S_4 = S_3 \cdot 1{,}05 - r = (S_2 \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r = ((S_1 \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r$$
$$= (((100000 \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r) \cdot 1{,}05 - r.$$

Jetzt multiplizieren wir aus, sortieren etwas und fassen dann wieder zusammen. Als Ergebnis erhalten wir

$$S_4 = 100000 \cdot 1{,}05^4 - r \cdot (1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1).$$

Damit liegt die Vermutung nahe, dass die Summe nach dem n-ten Jahr durch

$$S_n = 100000 \cdot 1{,}05^n - r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1{,}05^k$$

angegeben wird. Wir wenden unsere Formel für die n-te Partialsumme der geometrischen Reihe an. Die n-te Partialsumme z_n der geometrischen Folge (a_n) mit $a_n = q_0 \cdot q^n$ und $n \in \mathbb{N}$ und $q > 0, q \neq 1$ ist gegeben durch

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} q_0 q^k = q_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Damit erhalten wir

$$S_n = 100000 \cdot 1{,}05^n - r \cdot \frac{1 - 1{,}05^n}{1 - 1{,}05}.$$

Nun wollen wir r für $n=15$ berechnen, wobei $S_{15}=0$ sein soll. Es ist dann

$$0=100000\cdot 1{,}05^{15}-r\cdot\frac{1-1{,}05^{15}}{1-1{,}05}\Leftrightarrow r=100000\cdot 1{,}05^{15}\cdot\frac{1-1{,}05}{1-1{,}05^{15}}=9634{,}23€$$

Dies ist die jährliche Rate.

b) Nun soll es nach 10 Jahren eine Sonderzahlung in Höhe von $10000€$ geben. Sonst bleibt alles gleich. Dadurch können wir folgende Formel aufstellen:

$$S_{15}=0=\left(100000\cdot 1{,}05^{10}-r\cdot\frac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05}-10000\right)\cdot 1{,}05^{5}-r\cdot\frac{1-1{,}05^{5}}{1-1{,}05}.$$

Vom Betrag nach zehn Jahren sind die $10000€$ abzuziehen. Mit diesem Betrag wird dann weiter gerechnet, die Rate soll aber immer gleich sein. Nach 15 Jahren sind die Schulden abbezahlt. Hierdurch ergibt sich die eben aufgestellte Formel. Formen wir um, so erhalten wir

$$0=100000\cdot 1{,}05^{15}-r\cdot 1{,}05^{5}\cdot\frac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05}-10000\cdot 1{,}05^{5}-r\cdot\frac{1-1{,}05^{5}}{1-1{,}05}$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{\left(100000\cdot 1{,}05^{15}-10000\cdot 1{,}05^{5}\right)}{1{,}05^{5}\cdot\frac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05}+\frac{1-1{,}05^{5}}{1-1{,}05}}=9042{,}78€.$$

Dies ist hier die jährliche Rate.

□

Aufgabe A6 (Grenzwertsuche):

Bestimmen Sie durch korrekte Anwendung der Grenzwertsätze den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\text{ und }n\in\mathbb{N}.$$

Lösung:

Zur Anwendung der Grenzwertsätze benötigen wir zuerst eine Umformung mit Hilfe der dritten Binomischen Formel. Es ist

$$b_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}=\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{2n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Damit können wir den Grenzwert bilden:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Aufgabe A7 (Partialsummen):

Gegeben seien die im Folgenden explizit formulierten Folgen. Alle Folgen sind für $n,k \in \mathbb{N}$ definiert. Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge der Partialsummen, welche definiert ist durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \; .$$

a) (a_k) mit $a_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k$

b) (a_k) mit $a_k = \left(-\frac{1}{4}\right)^k$

c) (a_k) mit $a_k = (-0{,}4)^k$

d) (a_k) mit $a_k = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k$

e) (a_k) mit $a_k = 2{,}5\left(\frac{1}{5}\right)^k$

f) (a_k) mit $a_k = 0{,}1\cdot(-0{,}2)^k$

Lösungen:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{7}$ d) 3 e) $\frac{25}{8}$ f) $\frac{1}{12}$