Themen:

Trigonometrische Funktionen – Grundlagen

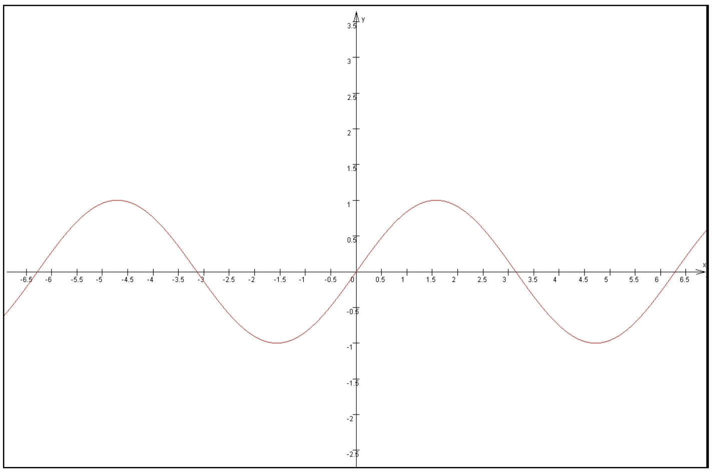
Die Modifizierung trigonometrischer Funktionen

Im Folgenden wollen wir uns anschauen, wie sich der Graph (das Schaubild) der Sinusfunktion verändert, wenn wir bestimmte Änderungen an ihrem Funktionsterm vornehmen.

Die normale Sinusfunktion

Ihr Funktionsterm lautet: $f(x) = \sin(x)$.

Das dazugehörige Schaubild:

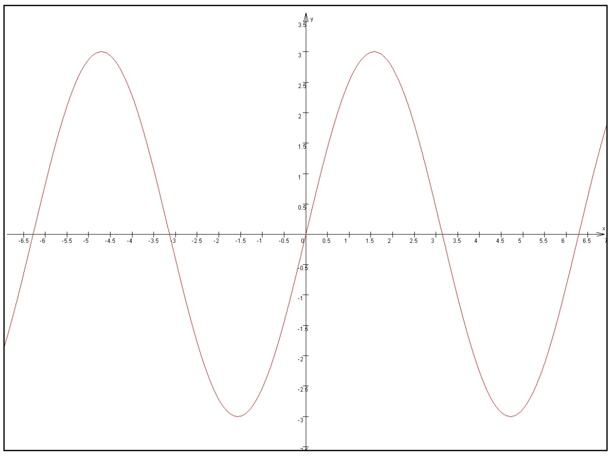


Erste Modifizierung

Wir multiplizieren den Funktionsterm mit einer konstanten Zahl a, die nicht Null ist. Damit erhalten wir:

$$f(x) = a \cdot \sin(x)$$

Wir betrachten die Veränderungen im Schaubild für $a = 3$:



Wie man erkennen kann, hat sich die Amplitude der Funktion verändert und nun den Wert 3 angenommen, also genau die Zahl, mit der wir multipliziert haben.

Erste Modifizierung

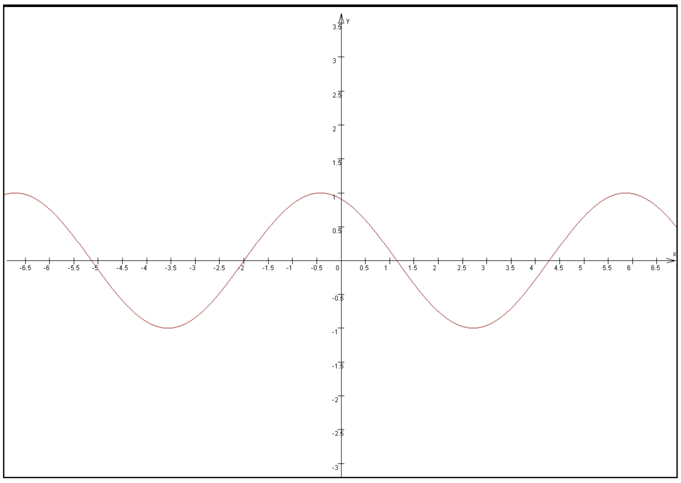
$f(x) = a \cdot \sin(x)$ $\Rightarrow$ Änderung der Amplitude

Zweite Modifizierung

Wir addieren eine Zahl b zu der Variablen x in der Funktion. Damit erhalten wir:

$$f(x) = \sin(x + b)$$

Wir betrachten wiederum das Schaubild, diesmal für $b = 2$:



Wir erkennen, dass die ursprüngliche Sinusfunktion um 2 nach links verschoben wurde.

Zweite Modifizierung

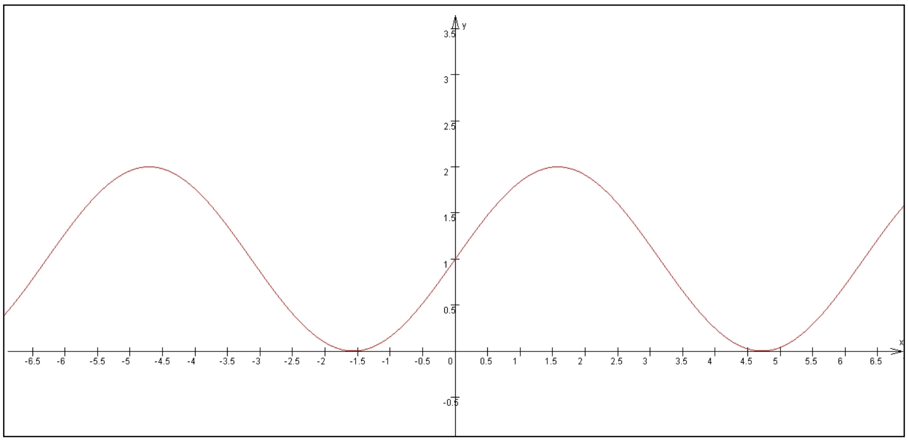
$f(x) = \sin(x + b)$ $\Rightarrow$ Verschiebung des Schaubildes nach links ($b > 0$) oder rechts ($b < 0$).

Dritte Modifizierung

Nun addieren wir eine Zahl c zu dem ganzen ursprünglichen Sinusterm und erhalten folgenden Ausdruck:

$$f(x) = \sin(x) + c$$

Nun betrachten wir das Schaubild der neuen Funktion für $c = 1$:



Wir können erkennen, dass diese Addition das ursprüngliche Schaubild der Sinusfunktion um 1 nach oben verschoben hat.

Dritte Modifizierung

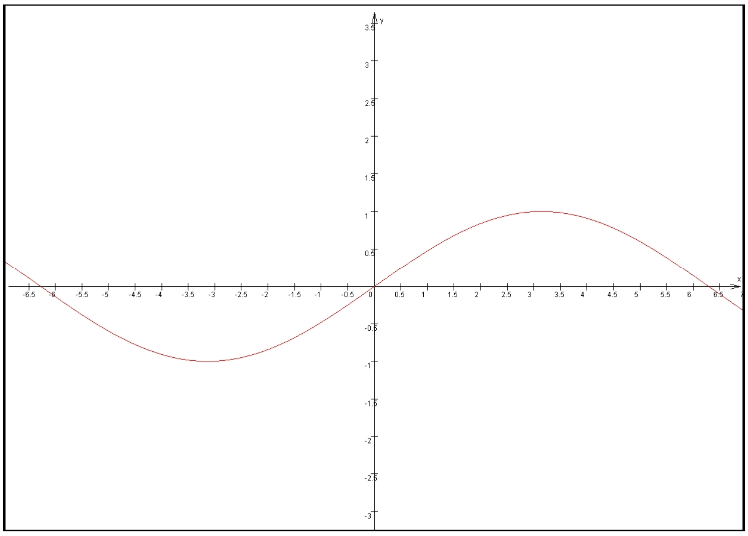
$f(x) = \sin(x) + c \Rightarrow$ Verschiebung des Schaubildes nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$).

<u>Vierte Modifizierung</u>

Zum Schluss multiplizieren wir die Variable x mit einer Zahl d ungleich 0. Wir erhalten:

$$f(x) = \sin(d \cdot x)$$

Das Schaubild betrachten wir diesmal für $d = 0{,}5$:



Wir erkennen, dass sich die Periode der ursprünglichen Sinusfunktion (2π) verändert hat. Wir erhalten die neue Periode, indem wir 2π durch d teilen.

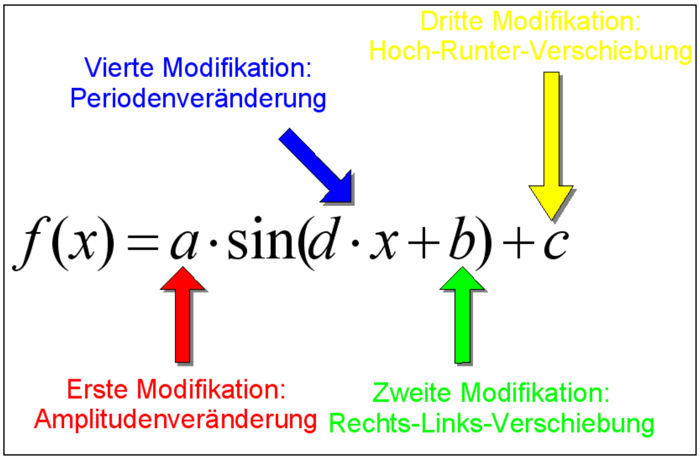
Vierte Modifizierung

$$f(x) = \sin(d \cdot x) \Rightarrow \text{Verändert die Periode}$$

(Beschleunigung für $d > 1$, Verlangsamung für $0 < d < 1$ und Rückwärtslauf für $d < 0$)

Zusammenfassung

In der folgenden Grafik sind nochmals alle vier Modifizierungen aufgezeigt.



!ANMERKUNG! Sind b und d gleichzeitig vorhanden, so wird die ursprüngliche Sinusfunktion um den Betrag $\left|\frac{b}{d}\right|$ nach links $\left(\frac{b}{d} > 0\right)$ oder rechts $\left(\frac{b}{d} < 0\right)$ verschoben, nicht um den Betrag von b!

Die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen

	$f(x)=\sin x$	$g(x)=\cos x$	$h(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
Nullstellen	$x_0=0$ $x_1=\pi\ldots$ $x_k=k\cdot\pi$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	$x_0=\dfrac{\pi}{2}$ $x_1=\dfrac{3\pi}{2}\ldots$ $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	$x_0=0\ldots$ $x_k=k\cdot\pi$ (mit $k\in\mathbb{Z}$) Siehe Nullstellen vom Sinus
Ableitungen	$f'(x)=\cos x$ $f''(x)=-\sin x$ $f'''(x)=-\cos x$ $f^{(4)}(x)=\sin x$ $\vdots$	$g'(x)=-\sin x$ $g''(x)=-\cos x$ $g'''(x)=\sin x$ $g^{(4)}(x)=\cos x$ $\vdots$	$h'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $h''(x)=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$
Hoch/Tiefpunkte $f'(x)=0$	$\cos x=0$ $\downarrow$ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ $x_1=\dfrac{3\pi}{2}$ $\vdots$ $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ $E_k(\pi/2+k\pi/\pm1)$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	$-\sin x=0$ $\downarrow$ $x_0=0$ $x_1=\pi$ $\vdots$ $x_k=k\cdot\pi$ $E_k(k\pi/\pm1)$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	Keine Wächst streng monoton im Intervall $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)
Integral	$\int\sin(x)dx=-\cos x+c$	$\int\cos(x)dx=\sin x+c$	$\int\tan(x)dx$ $=$ $-\ln(\cos x)+c$
Wendepunkte **= *Nullstellen*** $f''(x)=0$	$-\sin x=0$ s.o.	$-\cos x=0$ s.o.	$h''(x)=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}=0$ s.o.
Periode	2π	2π	π
Wertemenge	$[-1;+1]$	$[-1;+1]$	$(-\infty;+\infty)$
Symmetrien	• Punktsymmetrie zum Ursprung und zu $P_k(k\pi/0)$ • Achsensymmetrie zu $x=\pi/2;3\pi/2\ldots$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	• Achsensymmetrie zur y-Achse und zu $x=\pi;2\pi\ldots$ • Punktsymmetrie zu P_k $(\pi/2+k\pi/0)$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)	Im Intervall $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ punktsymmetrisch zum Mittelpunkt M $(k\pi/0)$ (mit $k\in\mathbb{Z}$)