

Themen:

Die vollständige Kurvendiskussion

Kurvendiskussion – Komplette Grundlagen mit Beispiel

Das Beispiel führen wir immer an der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ durch.

Was ich machen will	Was ich dann machen muss	Beispiel
Nullstellen	$f(x) = 0$	$x^3 - 4x = 0 \quad :x \quad x_1 = 0$ $x^2 - 4 = 0 \quad \text{also} \quad x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4}$ $x_2 = 2 \quad N_1(2/0)$ $x_3 = -2 \quad N_2(-2/0)$
Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte) auch Extrema genannt.	$f'(x) = 0$ dann VZW: von + nach - : Hochpunkt (H) von - nach + : Tiefpunkt (T) oder $f''(x)$: $f''(x) > 0$ Tiefpunkt $f''(x) < 0$ Hochpunkt	$f'(x) = 3x^2 - 4$ $3x^2 - 4 = 0$ $x^2 = \frac{4}{3}$ $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}, x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ ($\approx 1,155$) VZW : $f'(1,1) = 3 \cdot 1,1^2 - 4 = -0,37 < 0$ $f'(1,2) = 3 \cdot 1,2^2 - 4 = 0,32 > 0$ oder $f''(x) = 6x$ $f''(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6,93 > 0$ somit : <i>Tiefpunkt</i> $T(\sqrt{\frac{4}{3}} / f(\sqrt{\frac{4}{3}})) = T(\sqrt{\frac{4}{3}} / -3,08)$ analog anderer Punkt.
Wendepunkte	$f''(x) = 0$ Wendepunkt (W) dann VZW: von - nach + : Rechts- nach Linkskurve. von + nach - : Links- nach Rechtskurve. $f'''(x) > 0$ Rechts - Links $f'''(x) < 0$ Links - Rechts	$f''(x) = 6x$ $6x = 0$ $x = 0$ VZW : $f'''(-0,1) = 6 \cdot (-0,1) = -0,6 < 0$ $f'''(0,1) = 6 \cdot 0,1 = 0,6 > 0$ Rechts - Linkskurve Wendepunkt $W(0 / f(0)) = W(0/0)$

<p>Symmetrien</p>	<p>Nur gerade Hochzahlen: Achsensymmetrie (Achtung: auch 0 gerade) Nur ungerade Hochzahlen: Punktsymmetrie</p>	<p>Nur ungerade Hochzahlen (3 und 1), also Punktsymmetrie zum Ursprung O(0/0).</p>
<p>Steigung m_t einer Tangente in einem Punkt</p>	<p>$f'(x)$ bilden und den x-Wert des Punktes einfach einsetzen und ausrechnen.</p>	<p>$f'(x) = 3x^2 - 4$ Punkt(1/-3) $f'(1) = -1 = m_t$</p>
<p>Gleichung einer Tangente/Normalen in einem Punkt P(x_P/y_P)</p>	<p>$t(x) = f'(x_P)(x - x_P) + y_P$ $n(x) = -\frac{1}{f'(x_P)}(x - x_P) + y_P$</p>	<p>$P(1/-3)$ $t(x) = -1 \cdot (x - 1) + (-3) = -x + 1 - 3$ $t(x) = -x - 2$ Normalengleichung genau gleich, bis auf die Steigung. Diese muss mit $m_{Tangente} \cdot m_{Normale} = -1$ berechnet werden. Die Tangentensteigung ist $f'(x)$ in dem Punkt.</p>
<p>Stetigkeit in einem Punkt P(x_P/y_P)</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow x_P} f(x) = f(x_P)$</p>	<p>$P(1/-3)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^3 - 4x) = -3 = f(1)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^3 - 4x) = -3 = f(1)$ <i>gleich!</i> also stetig in P(1/-3).</p>
<p>Differenzierbarkeit in einem Punkt P(x_P/y_P)</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow x_P} f(x) = f(x_P)$ und $\lim_{x \rightarrow x_P} \frac{f(x) - f(x_P)}{x - x_P} = f'(x_P)$</p>	<p>Siehe bei Stetigkeit – Gleiches bei der Ableitung.</p>
<p>Grenzwerte</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x) = -\infty$ Analoges Verfahren bei Polstellen, also dort, wo die Funktion eine Lücke hat (Definitionslücke). Grenzwert ist dann der fehlende x-Wert (die „Lücke“).</p>
<p>Grenzübergang</p>	<p>Bildung des Differenzenquotienten $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Dann den einen</p>	<p>Aufgabe: Versuchen Sie beide Methoden</p>

	<p>Wert gegen den anderen laufen lassen. Entweder mit der h- oder mit der x-Methode:</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ <p>x - und h-Methode.</p>	<p>bei $f(x) = x^2$.</p>
<p>Monotonie</p>	<p>Erste Ableitung größer als 0, dann streng monoton wachsend. Erste Ableitung kleiner als 0, dann streng monoton fallend. (Das ist das Steigungsverhalten: Man geht immer von Extrempunkt zu Extrempunkt).</p>	

Kurzfassung

Eine vollständige Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) umfasst:

1. Die Ableitungen
2. Symmetrie des Schaubildes (gerade, ungerade)
3. Die Nullstellen
4. Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$ bzw. Definitionslücken
5. Die Extremstellen
6. Die Wendestellen
7. Das Schaubild