Themen:

Herleitungen der Ableitungsregeln

Die Herleitungen der Ableitungsregeln

1. Die Summenregel

Damit die Regel anwendbar ist, setzen wir voraus, dass die Funktionen u und v auf einem Intervall I definiert und an der entsprechenden Stelle $x \in I$ differenzierbar sind.

Die Funktion lautet: $f(x) = u(x) + v(x)$

Die Ableitung lautet: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Herleitung

Um die Regel herzuleiten, verwenden wir die sog. h-Methode (Unterkapitel VI.1.). Zur Erinnerung ist sie im Folgenden noch einmal in Grundzügen dargestellt:

Die h-Methode

Man bildet den Differenzenquotienten auf folgende Weise:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nun macht man den Grenzübergang:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Existiert der Grenzwert, hat man die Ableitung von f erhalten.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ist nun $f(x) = u(x) + v(x)$, wie am Anfang angenommen, so schreiben wir:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{[u(x_0+h)+v(x_0+h)]-[u(x_0)+v(x_0)]}{h}$$
$$= \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

Bilden wir nun von dem Term der letzten Zeile den Grenzwert, so erhalten wir:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$
$$= u'(x_0) + v'(x_0)$$

Die letzte Zeile ist nun unsere am Anfang dieses Unterkapitels postulierte Regel. Mit einer kleinen Umbenennung wird dies noch deutlicher: $x_0 = x$.

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Aus dieser Regel geht hervor, dass man jeden Summanden für sich ableiten kann. Um dies noch einmal zu verdeutlichen, schauen wir uns drei Beispiele an:

Beispiel 1

$$f(x) = x^5 + x^2 \xrightarrow{\text{Summenregel}} f'(x) = 5x^4 + 2x$$

Beispiel 2

$$g(x) = x^7 + x^4 + x \xrightarrow{\text{Summenregel}} g'(x) = 7x^6 + 4x^3 + 1$$

Beispiel 3

$$h(x) = \sin x + x^2 + e^x \xrightarrow{\text{Summenregel}} h'(x) = \cos x + 2x + e^x$$

2. Die Faktorregel

Damit die Regel anwendbar ist, setzen wir voraus, dass die Funktion u auf einem Intervall I definiert und an der entsprechenden Stelle $x \in I$ differenzierbar ist.

Die Funktion lautet: $f(x) = c \cdot u(x)$

Die Ableitung lautet: $f'(x) = c \cdot u'(x)$

Dabei ist $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Konstante.

<u>Herleitung</u>

Wir verwenden wieder die h-Methode. Damit erhalten wir analog zur Herleitung der Summenregel folgenden Term:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c \cdot u(x_0+h) - c \cdot u(x_0)}{h}$$
$$= c \cdot \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$$

Nun bilden wir wieder den Grenzwert des Terms der letzten Zeile und erhalten folgenden Ausdruck:

$$\lim_{h\to 0}\left(c \cdot \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} \right) = c \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} \right) = c \cdot u'(x_0)$$

Der letzte Ausdruck ist unsere Formel. Abschließend machen wir nun noch eine kleine Umbenennung: $x_0 = x$.

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Aus dieser Regel geht hervor, dass konstante Faktoren beim Ableiten einfach “mitwandern“. Dazu machen wir zwei Beispiele zum besseren Verständnis:

Beispiel 1

$$f(x)=5\cdot x^5=5x^5\xrightarrow{\text{Faktorregel}}f'(x)=5\cdot 5x^4=25x^4$$

Beispiel 2

$$g(x)=3x^4+5x^2+7x\xrightarrow[\text{Faktorregel}]{\text{Summenregel}}g'(x)=3\cdot 4x^3+5\cdot 2x+7\cdot 1=12x^3+10x+7$$

3. Die Produktregel

Damit die Regel anwendbar ist, setzen wir voraus, dass die Funktionen u und v auf einem Intervall I definiert und an der entsprechenden Stelle $x\in I$ differenzierbar sind.

Die Funktion lautet: $f(x)=u(x)\cdot v(x)$

Die Ableitung lautet: $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Herleitung

Uns dient, mal wieder, die h-Methode zur Herleitung der Formel. Dabei schreiben wir:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

Nun wenden wir einen kleinen Trick zum Zwecke unseres Vorankommen an:

Wir addieren 0!

Allerdings werden wir das etwas trickreicher veranstalten als man zuerst vermuten könnte:

$$\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)\overbrace{+v(x_0+h)\cdot u(x_0)-v(x_0+h)\cdot u(x_0)}^{=0}}{h}$$

Durch diese kleine, aber doch sehr feine Umformung, sind wir nun in der Lage, zur Grenzwertbildung geeignete Terme durch Ausklammern zu erhalten. Vorher sortieren wir aber erst noch ein bisschen um:

Umsortieren:

$$\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-v(x_0+h)\cdot u(x_0)+v(x_0+h)\cdot u(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

Ausklammern:

$$\frac{v(x_0+h)\cdot\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)+u(x_0)\cdot\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}$$

Nun schreiben wir die beiden Summanden mit getrennten Bruchstrichen und bilden den Grenzwert. Wir erhalten dann:

Kleine Umformungen:

$$\begin{aligned}&\frac{v(x_0+h)\cdot\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}+\frac{u(x_0)\cdot\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\\&=v(x_0+h)\cdot\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}+u(x_0)\cdot\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\end{aligned}$$

Der Grenzübergang:

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\left(v(x_0+h)\cdot\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}+u(x_0)\cdot\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(v(x_0+h)\cdot\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(u(x_0)\cdot\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\right)\\&=\left[\lim_{h\to 0}\big(v(x_0+h)\big)\right]\cdot\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}\right)\right]+\left[\lim_{h\to 0}\big(u(x_0)\big)\right]\cdot\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\right)\right]\\&=v(x_0)\cdot u'(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist unsere Formel. Zum Abschluss noch eine kleine Umbenennung: $x_0=x$.

$$\Rightarrow\ f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Nun haben wir eine Regel, um Produkte von Funktionen direkt abzuleiten.

Anmerkung:

Wenn man sich die Formel in der oben aufgezeigten Reihenfolge merkt, dann fällt es einem vielleicht leichter sich die sog. Quotientenregel zu merken.

Zum besseren Verständnis und zum Einüben der Vorgehensweise folgt nun noch ein Beispiel.

Beispiel

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1)$$

Wir bestimmen nun u und v und ihre Ableitungen:

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \begin{cases} u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = x+1 \Rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$$

Nun setzen wir unsere konkreten Funktionen in die Formel ein:

$$\begin{array}{ccccccccc} f'(x) & = & u'(x) & \cdot & v(x) & + & u(x) & \cdot & v'(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f'(x) & = & 2x & \cdot & (x+1) & + & x^2 & \cdot & 1 \end{array}$$

Noch etwas vereinfachen und wir erhalten schließlich die Funktion in folgender Form:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

4. Die Quotientenregel

Damit die Regel anwendbar ist, setzen wir voraus, dass die Funktionen u und v auf einem Intervall I definiert und an der entsprechenden Stelle $x \in I$ differenzierbar sind. Desweiteren setzen wir voraus, dass $v \neq 0$.

Die Funktion lautet: $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Die Ableitung lautet: $$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Herleitung

Zur Herleitung greifen wir wieder auf die h-Methode zurück und machen folgenden Ansatz:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)}{h}-\frac{f(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\cdot f(x_0+h)-\frac{1}{h}\cdot f(x_0)=\frac{u(x_0+h)}{h\cdot v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{h\cdot v(x_0)}$$

Nun formen wir weiter um, indem wir den Hauptnenner bilden:

$$\frac{u(x_0+h)}{h\cdot v(x_0+h)}\cdot\frac{v(x_0)}{v(x_0)}-\frac{u(x_0)}{h\cdot v(x_0)}\cdot\frac{v(x_0+h)}{v(x_0+h)}=\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{h\cdot v(x_0+h)\cdot v(x_0)}$$

Nun addieren wir auf eine etwas trickreichere Art 0 im Zähler (oben)!

Trick: Addition von 0!

$$\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)\overbrace{+u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)}^{=0}}{h\cdot v(x_0+h)\cdot v(x_0)}$$

Nun nehmen wir noch ein paar Umformungen vor, bevor wir den Grenzwert bilden.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\cdot\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}\\
&=\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\cdot\frac{v(x_0)\cdot\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)-u(x_0)\cdot\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\\
&=\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\cdot\left[v(x_0)\cdot\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}-u(x_0)\cdot\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\right]\end{aligned}$$

Nun bilden wir den Grenzwert.

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\cdot\left[v(x_0)\cdot\frac{\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)}{h}-u(x_0)\cdot\frac{\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)}{h}\right]\right)\\
&=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\right)\cdot\left(\lim_{h\to0}\big(v(x_0)\big)\cdot\lim_{h\to0}\left(\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\right)-\lim_{h\to0}\big(u(x_0)\big)\cdot\lim_{h\to0}\left(\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)\right)\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile der ersten Seite erhalten wir folgende Formel:

$$\frac{1}{[v(x_0)]^2}\cdot\left(v(x_0)\cdot u'(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)\right)=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$$

Damit haben wir schon unsere gesuchte Formel erhalten. Zum Abschluss machen wir noch eine kleine Umbenennung: $x_0 = x$.

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Zum besseren Verständnis und zum Einüben der Vorgehensweise folgt nun noch ein Beispiel.

<u>Beispiel</u>

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^3+2}$$

Nun bestimmen wir u und v und ihre Ableitungen:

$$f(x)=\frac{3x^2+1\rightarrow u(x)=3x^2+1\Rightarrow u'(x)=6x}{x^3+2\ \rightarrow v(x)=x^3+2\Rightarrow v'(x)=3x^2}$$

Setzen wir nun alles in die Formel ein, so erhalten wir:

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{6x\cdot(x^3+2)-(3x^2+1)\cdot 3x^2}{[x^3+2]^2}$$

Weiter umgeformt erhalten wir:

$$f'(x)=\frac{6x^4+12x-9x^4-3x^2}{[x^3+2]^2}=\frac{-3x^4-3x^2+12x}{[x^3+2]^2}=-3x\cdot\frac{x^3+x-4}{[x^3+2]^2}$$

5. Die Kettenregel

Damit die Regel anwendbar ist, setzen wir voraus, dass die Funktionen u und v auf einem Intervall I definiert und an der entsprechenden Stelle $x \in I$ bzw. $v(x) \in I$ differenzierbar sind.

Die Funktion lautet: $f(x) = u(v(x))$

Die Ableitung lautet: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

<u>Herleitung</u>

Zur Herleitung greifen wir (ein letztes Mal) auf die h-Methode zurück und machen folgenden Ansatz:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{h}$$

Nun nehmen wir noch ein paar Umformungen vor, bevor wir den Grenzwert bilden.

Als erstes versuchen wir den Differenzenquotienten so umzuformen, dass der Differenzenquotient der inneren Funktion v an der Stelle x_0 auftritt und der Differenzenquotient der äußeren Funktion u an der Stelle $v(x_0)$. Dazu setzen wir:

$$v(x_0+h)-v(x_0) = k \qquad (*)$$

und

$$v(x_0+h) = v(x_0)+k \qquad (**)$$

Diese beiden Terme setzen wir nun in unsere Ausgangsgleichung ein. Dabei multiplizieren wir trickreich mit 1.

$$\frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{h} \cdot 1 = \frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{h} \cdot \frac{\overbrace{v(x_0+h)-v(x_0)}^{=k}}{k}$$

Nun stellen wir die Terme um:

$$\frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{k}\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

Anschließend bilden wir den Grenzwert. Nach den Grenzwertsätzen gilt dabei folgender Zusammenhang:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n)=a\cdot b=ab$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{k}\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$
$$=\lim_{k\to 0}\left(\frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{k}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$

Anmerkung: Geht h gegen 0, so geht auch die Gleichung (*) und somit k gegen 0. Da v stetig ist, gilt dieses Argument.

$$\lim_{k\to 0}\left(\frac{u(v(x_0+h))-u(v(x_0))}{k}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)=u'(v(x_0))\cdot v'(x_0)$$

Wir erhalten also die Formel vom Anfang:

$$f'(x)=u'(v(x))\cdot v(x)\ \text{(= äußere mal innere Ableitung)}$$

Verkürzt schreibt man auch oft:

$$f'(x)=u'(v)\cdot v'(x)$$

Zum besseren Verständnis und zum Einüben der Vorgehensweise folgt nun noch ein Beispiel.

<u>Beispiel</u>

$$f(x)=\sin(2x^2+x)$$

Nun bestimmen wir u und v und ihre Ableitungen:

$$f(x) = \sin(2x^2 + x) \begin{array}{l} \to u(v) = \sin v \Rightarrow u'(v) = \cos v \\ \to v(x) = 2x^2 + x \Rightarrow v'(x) = 4x + 1 \end{array}$$

Setzen wir alles in die Formel ein, so erhalten wir:

$$f'(x) = \cos(2x^2 + x) \cdot (4x + 1)$$