DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

Mathematik 2 – Extrablatt 01

Themen:

Das Horner-Schema

Das Horner-Schema wird zur **Berechnung von Funktionswerten** verwendet. Es kann aber auch anstatt der Polynomdivision verwendet werden, wenn man durch einen Linearfaktor (d.h. eine Funktion der Gestalt $x-a$ mit $a \in \mathbb{R}$) dividieren will. Wir wollen das Horner-Schema zu Beginn an einem kleinen Beispiel erläutern.

I Das Horner-Schema und die Funktionswertbestimmung

Beispiel 1

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 7$. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 2$.

Anstatt den Funktionswert durch Einsetzen direkt zu berechnen und viele Multiplikationen (wegen der Potenzen bei jedem x) durchzuführen, können wir deren Anzahl mit fortgesetztem Ausklammern reduzieren. Dies sieht wie folgt aus:

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)x - 7 = \left[(2x-3)x+1\right]x - 7 \,.$$

Der Funktionswert berechnet sich dann zu

$$f(2) = \left[(2\cdot 2 - 3)\cdot 2 + 1\right]\cdot 2 - 7 = -1 \,.$$

Dies können wir in Form einer Tabelle schreiben. Diese schematische Vorgehensweise bezeichnet man als **Horner-Schema**.

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 2 & -3 & 1 & -7 & \\ x=2 & & 4 & 2 & 6 & \\ \hline & 2 & 1 & 3 & -1 & = f(2) \end{array}$$

Addition der Werte

Dabei notiert man nur die Koeffizienten, welche sich beim fortgesetzten Ausklammern ergeben, und muss lediglich eine Multiplikation und eine Addition pro Schritt (Pfeil diagonal + Pfeil senkrecht) durchführen. In unserem Fall sind das drei Multiplikationen und drei Additionen (also sechs Rechenoperationen insgesamt). Bei der normalen Rechnung muss man hier fünf Multiplikationen (drei bei $2x^3 = 2\cdot x\cdot x\cdot x$ und noch mal zwei bei $3x^2 = 3\cdot x\cdot x$) und drei Additionen durchführen, also insgesamt acht Rechenoperationen. Bei größeren Polynomen können sich die Zahlen noch deutlicher unterscheiden. Die Verringerung der Anzahl der Multiplikationen ist der Hauptvorteil des Horner-Schemas.

Vorsicht!

Ist eine Hochzahl nicht vertreten, so notiert man als Koeffizienten eine 0 !

Wir betrachten als Beispiel das Polynom

$$g(x) = 2x^4 - 2x + 1\,.$$

Bei diesem fehlen die zweite und die dritte Potenz der Laufvariablen x. Für das Horner-Schema notieren wir deswegen in der ersten Zeile die folgenden Koeffizienten:

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 1$$

Wir erwähnten bereits, dass das Horner-Schema auch als Ersatz für die Polynomdivision mit einem Linearfaktor verwendet werden kann. Wir wollen dies nun erläutern.

<u>II Das Horner-Schema und die Polynomdivision</u>

Wir betrachten zu Beginn ein Beispiel für die Polynomdivision mit einem Linearfaktor.

<u>Beispiel 2</u>

Dividiere die Funktion $h(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ durch $q(x) = x - 2$.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{cccccccll}
(x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & - & 2) & : & (x-2) = x^2 - 2x - 1 \quad \boxed{\text{REST}: -4} \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & & \cdot x^2 \\
\cline{1-3}
0 & - & 2x^2 & + & 3x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & & \cdot(-2x) \\
\cline{2-5}
 & & 0 & - & 1x & - & 2 & & \\
 & & & - & 1x & + & 2 & & \cdot(-1) \\
\cline{4-7}
 & & & & 0 & \boxed{-} & \boxed{4} & &
\end{array}
$$

abziehen

abziehen

abziehen

Multiplikationen

Hiermit kann nun eine Zerlegung (<u>Produktform</u>) von $h(x)$ erfolgen:

$$h(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = (x^2 - 2x - 1)\cdot(x-2) - 4$$

Der Rest von -4 ist der Funktionswert an der Stelle $x = 2$. Das Horner-Schema hierzu sieht wie folgt aus:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -4 & 3 & -2 & \\
x=2 & & 2 & -4 & -2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & -4 & =h(2)
\end{array}
$$

Vergleicht man dieses mit der Zerlegung auf der vorherigen Seite, so fällt das Folgende auf:

Die Koeffizienten des bei der Abspaltung des Linearfaktors entstehenden Polynoms stehen in der dritten Zeile des Horner-Schemas.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ n-ten Grades lässt sich zerlegen in

$$p_n(x) = \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\text{abgespalteter}\\ \text{Linearfaktor}}} \overbrace{p_{n-1}}^{\substack{\text{Polynom}\\ \text{(n-1)-ten Grades}}}(x) + \underbrace{p_n(x_0)}_{\substack{\text{Funktionswert an}\\ \text{der Stelle } x=x_0}} .$$

Ist nun $p_n(x_0) = 0$, so gilt, dass

$$p_n(x) = \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\text{abgespalteter}\\ \text{Linearfaktor}}} \overbrace{p_{n-1}}^{\substack{\text{Polynom}\\ \text{(n-1)-ten Grades}}}(x).$$

Das Horner-Schema liefert, wie bereits erwähnt, in der dritten Zeile die Koeffizienten des Polynoms $p_{n-1}(x)$, welches einen Grad niedriger ist als $p_n(x)$, und den Funktionswert $p_n(x_0)$. Das **Horner-Schema ersetzt die Polynomdivision** gemäß den gemachten Überlegungen.

Aufgabe

a) Berechnen Sie die Funktionswerte von $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$ an den Stellen $x = 4$ und $x = -2$.

b) Zerlegen Sie $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ in die Produktform. Raten Sie dazu zuerst eine Nullstelle.

c) Weisen Sie durch doppelte Anwendung des Horner-Schemas nach, dass $x_{1/2} = 1$ eine doppelte Nullstelle von $h(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$ ist.