Differentialgleichung (DGL)

Gleichung, in der neben der zu bestimmenden Funktion (z.B. y) auch deren Ableitungen nach den unabhängigen Variablen (z.B. x_1, x_2, x_3, ...) auftreten können.

Gewöhnliche DGL

Spezialfall, bei dem die unbekannte Funktion nur von einer Variablen abhängt, z.B. y = f(x). Die auftretenden Ableitungen sind daher Ableitungen nach dieser einen Variablen, z.B.

$$y' = \frac{d}{dx}y,\ y'' = \frac{d^2}{dx^2}y,\ y''' = \frac{d^3}{dx^3}y,\ \ldots$$

Partielle DGL

Die unbekannte Funktion hängt von mehr als nur einer Variablen ab, z.B. $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Die auftretenden Ableitungen der unbekannten Funktion sind daher partielle Ableitungen nach den einzelnen Variablen und ggf. auch gemischte partielle Ableitungen nach mehreren Variablen, z.B.:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}y,\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}y,\ \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}y,\ \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}y,\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}y,\ \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}y,\ \ldots$$

...

$$\ldots,\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^3}{\partial x_5^3}y,\ \ldots$$

Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung keine partiellen DGLn. Diese sind aber z.B. in der Hochfrequenztechnik wichtig, wo etwa. die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle als Funktion von x, y, z und t beschrieben wird.

Systeme von DGLn

Bestehen aus mehreren miteinander gekoppelten (gewöhnlichen bzw. partiellen) DGLn, die in den einzelnen Gleichungen jeweils mehrere unbekannte Funktionen enthalten.

Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung keine Systeme von DGLn. Diese treten aber z.B. auf, wenn man das Verhalten eines Sinusstromnetzwerkes mit Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten im Zeitbereich untersucht.

Ordnung einer DGL

Höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion.

Beispiele:

$$\underbrace{y''}_{2} + \underbrace{ay}_{0} = 0 \qquad \text{DGL 2. Ordnung}$$

$$\underbrace{y^{(4)}}_{4} + \underbrace{3yy''^3}_{2} - \underbrace{7y'x^2}_{1} + \underbrace{2y^2 \sin x}_{0} = e^{-x} \qquad \text{DGL 4. Ordnung}$$

Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung nur DGLn 1. und 2. Ordnung.

Grad einer DGL

Höchste auftretende Potenz der gesuchten Funktion einschließlich ihrer Ableitungen.
Beispiel:

$$\underbrace{y^{(4)}}_{1} + \underbrace{3yy''^3}_{4} - \underbrace{7y'x^2}_{1} + \underbrace{2y^2 \sin x}_{2} = e^{-x} \qquad \text{DGL 4. Grades}$$

Lineare DGL

DGL, in der die gesuchte Funktion einschließlich ihrer Ableitungen nur in der ersten Potenz auftritt und in der keine nichtlinearen Funktionen der gesuchten Funktion enthalten sind.
Lineare DGLn können daher nur vom Grad 1 sein.
(Eine DGL. die nicht linear ist, heißt „nichtlineare DGL".)
Beispiele:

$y''' + xy'' + 3y\sin x = 3\cos x$ lineare DGL

$\underbrace{y'''y}_{\text{2.Grad}} + 3y \underbrace{\sin y}_{\text{nichtlinear}} = 0$ nichtlineare DGL

Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung im wesentlichen lineare DGLn.

DGL in expliziter Form

DGL, die nach der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion aufgelöst ist.
Anderenfalls spricht man von einer DGL in „impliziter Form". DGLn in impliziter Form sind teilweise in explizite Form zu bringen, teilweise ist dies mathematisch nicht möglich.
Beispiele:

$\dot{y} = ay + b\sin\omega t$ DGL in expliziter Form

$\ddot{y}y + \sin y = e^{-x}$ DGL in impliziter Form, die leicht in explizite Form zu bringen ist

$y''^2 + \sin y'' + 3y' = 0$ DGL in impliziter Form, die nicht in explizite Form zu bringen ist

Störglied einer DGL

Anteil einer DGL, der nicht von der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen, sondern nur von der/den unabhängigen Variablen abhängt. Dieser Anteil kann dann allein auf die rechte Seite gebracht werden.
Anmerkung : Das Störglied beschreibt in der Regel die äußere Anregung eines Systems.

Homogene DGL

DGL, deren Störglied identisch Null ist.
Eine DGL, bei der das Störglied nicht verschwindet, heißt „inhomogene DGL".
Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung sowohl homogene als auch inhomogene DGLn. Die Lösung einer inhomogenen DGL wird aus der Lösung der zugehörigen homogenen DGL gewonnen. Homogene DGLn beschreiben das Verhalten von Systemen, die sich selbst überlassen sind, also keine äußere Anregung erfahren.

Allgemeine Lösung einer DGL

Da DGLn prinzipiell durch Integration gelöst werden, enthält die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung n freie Konstanten („Parameter"), die von den n Integrationskonstanten herrühren. Die allgemeine Lösung einer DGL umfasst also eine Schar von n-mal unendlich vielen Lösungsfunktionen.

Partikuläre Lösung einer DGL

Eine beliebige Funktion ohne freie Konstanten, die eine inhomogene DGL löst, nennen wir partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Spezielle Lösung einer DGL

Durch Berücksichtigung von Anfangs- und Randbedingungen, die aus der konkreten Anordnung zu gewinnen sind, lassen sich (einzelne oder) alle freien Konstanten in der allgemeinen Lösung einer DGL bestimmen und man erhält eine spezielle Lösung der DGL.

Singuläre Lösung einer DGL

Eine oder mehrere Lösungsfunktionen einer DGL, die durch die allgemeine Lösung nicht beschreibbar sind. Singuläre Lösungsfunktionen treten nur manchmal auf und sind dann oft sehr einfach, z.B. konstante Funktionen.

Anfangswerte einer DGL

Sind Werte für die gesuchte Funktion oder/und ihre Ableitungen für einen bestimmten Wert der unabhängigen Variablen. Ist die unabhängige Variable die Zeit t, so sind Anfangswerte oft für $t = 0$ gegeben.

Randwerte einer DGL

Sind Werte für die gesuchte Funktion für beliebige Werte der unabhängigen Variablen.

Koeffizienten einer DGL

Sind die Faktoren, mit denen die einzelnen Ableitungen (einschließlich der nullten Ableitung, also der Funktion selbst) der unbekannten Funktion multipliziert werden. Die Koeffizienten können konstante Zahlen sein („DGL mit konstanten Koeffizienten“) oder (ggf. zusätzlich) von der unabhängigen Variablen oder einer anderen Ableitung der unbekannten Funktion abhängen.

Anmerkung: Wir behandeln in dieser Vorlesung hauptsächlich DGLn mit konstanten Koeffizienten.

Typ einer DGL

Ist die Zusammenfassung aller oben genannten Merkmale einer DGL.