BERUFSAKADEMIE STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach: Mathematik

Klausur

Datum: 24.3.03

Ausbildungsbereich:	Technik	Studienjahrgang:	2002
Fachrichtung:	Maschinenbau	Studienhalbjahr:	1
Gruppe:	2, 3, A, C	Bearbeitungszeit:	90 min.
Dozent:	Bauer, Baum, Schäffler		
Hilfsmittel:	alle, außer elektronische Rechner		
Bewertung:	Punkte:	Note:	Signum: ....
Student:	....		

Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !!!

Aufgabe 1 (20 min.)

a) Gegeben sind der Punkt $P(2/0/-4)$ und der Vektor $\vec{PQ} = (-2;4;6)$. Welche Koordinaten haben der Punkt Q und der Mittelpunkt der Strecke PQ ?

b) Gegeben sind die Punkte $O(0/0/0)$, $P(2/-1/1)$ und $Q(3/1/2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E durch diese drei Punkte in der Form

$ax + by + cz + d = 0$.

c) Für welchen Wert des reellen Parameters q liegen die folgenden 4 Punkte in einer Ebene:

$A(1/0/-1)$; $B(2/1/1)$; $C(4/2/q)$; $D(1/5/2)$?

d) Gegeben sind die Ebenen

(E): $3x - 2y + z = 0$ und (F): $x + 3y + 3z = 0$.

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen, sowie eine Gleichung ihrer Schnittgeraden in Parameterform.

Aufgabe 2: (20 min.)

a) Für welche Werte von k besitzt das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 10 \\ x + ky - z &= 5 \\ x - y + kz &= 5 \end{aligned}$$

a1) keine Lösung
a2) mehr als eine Lösung
a3) eine eindeutige Lösung
Berechnen Sie für die Fälle a2) + a3) die Lösung des Gleichungssystems !

b) Für welche Werte von k besitzt das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 0 \\ x + ky - z &= 0 \\ x - y + kz &= 0 \end{aligned}$$

nichttriviale Lösungen ? Bestimmen Sie diese Lösungen !

Aufgabe 3: (15 min.)

a) Für welche reelle Zahlen x gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln(1+x^2) & \cos(2x) \\ 0 & e^{2x} & 2e^{2x} \\ 0 & xe^{2x} & (1-2x)e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

b) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & 1 \\ -1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 1 & \cos^2 x \end{vmatrix}$$

c) Es sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $\underline{A}^2$ und $\underline{A}^3$

Was ergibt sich für $\underline{A}^n$?

Aufgabe 4: (35 Min.)

a) Bestimmen Sie aus der Gleichung

$$Ae^{j\varphi} = \left[\frac{1+2j}{1-3j}\right]^3$$

die Werte für A und φ. ($A,\ \varphi \in \mathbb{R};\ A > 0$)

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die Lösung sind von

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{2}.$$

c) Für welche komplexen Zahlen Z gilt folgende Beziehung?

$$|z + 2| = |z - 2|$$

d) Berechnen Sie sämtliche Werte von

$$\sqrt[3]{3\cdot j^{-71} - 11\cdot j^{-51}}$$

e) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$(z^5 - 16z)\cdot\left(z + \frac{25}{3+4j}\right) = 0$$

Mathematik; BA; 24.3.03; 1. Semester

Aufgabe 1 | 10 Pkt

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

(2) a) P(2/0/−4); Q(x/y/z) $\Rightarrow$

$$\bar{PQ} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 = x_Q \\ y = 4 = y_Q \\ z = 2 = z_Q \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} x_Q - 2 \\ y_Q - 0 \\ z_Q + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\boxed{Q(0/4/2)}$ ✓; $\boxed{M(1/2/-1) \text{ Mittelpunkt}}$ ✓

$x_M = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{+2+0}{2} = 1$

$y_M = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$

$z_M = \dfrac{z_P + z_Q}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1$

(2) b) $O \in E \Rightarrow d = 0$; $ax + by + cz + d = 0$

$$\bar{n} = O\bar{P} \times O\bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ✓$$

E: $ax + by + cz = 0 \Rightarrow \boxed{3x + y - 5z = 0}$ ✓

(3) c) $A\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\bar{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ q+1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$[A\bar{B}, A\bar{C}, A\bar{P}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & q+1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & q-5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 ✓ = -3 - 5(q-5) = -5q + 22 ✓$$

$\Rightarrow \boxed{q = 22/5}$ ✓

(3) d)

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi/2} ✓$$

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} ✓ \Rightarrow \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} ✓$$

liegt in der Schnittgeraden

Da beide Ebenen durch den Nullpunkt gehen, geht auch die Schnittgerade durch den Nullpunkt O(0/0/0)

$\vec{r} = \vec{x} = \underbrace{\vec{x}_0}_{\vec{0}} + \lambda \vec{n}$

2b) Ergebnis von Aufgabe 2.a), aber mit

4 Pkt. den rechten Seiten Null kann verwendet werden

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & (k+1) & -(k+1) \\ 0 & 0 & 2+k-k^2 \end{bmatrix} \Longrightarrow (2+k-k^2)z = 0 \Longrightarrow$$

für $z \neq 0 \Longrightarrow \quad -k^2+k+2=0 \Longrightarrow$

$$k_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$ — 1

Das homogene Gleichungssystem hat nur für $k=-1$ und $k=2$ nichttriviale Lösungen

$\boxed{k=-1}$: $x-y-z=0 \Longrightarrow$

$t_1 \in R$
$t_2 \in R$

$x = t_1$	0,5
$y = t_2$	0,5
$z = t_1 - t_2$	0,5

$\boxed{k=2}$

$$\left.\begin{matrix} x-y+2z=0 \\ 3y-3z=0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} y=z \\ x=y-2z=z-2z=-z \end{matrix}$$

$x = -t$	0,5
$y = t$	0,5
$z = t$	0,5

$\Longrightarrow$ siehe Alternative Rückseite

BAi 1. Semester; 24.3.03	Aufgabe 3	8 Pkt

3a) 2 Pkt

Für welche reelle Zahlen x gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln(1+x^2) & \cos(2x) \\ 0 & e^{2x} & 2e^{2x} \\ 0 & xe^{2x} & (1-2x)e^{2x} \end{vmatrix} = 0\ ?$$

Entwickeln nach der 1. Spalte:

$$1\{e^{2x}(1-2x)e^{2x} - 2e^{2x} \cdot x e^{2x}\} = e^{4x}(1-2x-2x) = 0$$

$$e^{2x}(1-4x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \text{ ——— } 2$$

3b) 2 Pkt.

Entwicklung nach der 3-ten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & 1 \\ -1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 1 & \cos^2 x \end{vmatrix} = 1(-1-\cos^2 x) + \cos^2 x \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} =$$

$$= -1 - \cos^2 x + \cos^2 x = \boxed{-1} \text{ — } 2$$

3c) 4 Pkt.

Es sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $\underline{A}^2$ und $\underline{A}^3$.

Was ergibt sich für $\underline{A}^n$?

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array} \Rightarrow \underline{A}^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\underline{A}^2 = 3\underline{A} \Rightarrow \underline{A}^3 = \underline{A}^2 \cdot A = (3^1 A)\underline{A} = 3\underline{A}^2 = 3 \cdot 3\underline{A} = 3^2 \cdot \underline{A}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix} \quad 1 \quad ; \underline{A}^4 = \underline{A}^3 \cdot \underline{A} = 3^2 \cdot \underline{A}\underline{A} = 3^2 \cdot 3\underline{A} = 3^3 \cdot A$$

$$\boxed{\underline{A}^{(n)} = 3^{(n-1)} \cdot \underline{A}} \quad 2$$

Aufgabe 2:

BA, 24.3.02 | 1.Sem | w | Aufgabe 2

4 | b) Für welche Werte von k besitzt das homogene Gleichungssystem

$kx + y + z = 0$

$x + ky - z = 0$

$x - y + kz = 0$

nichttriviale Lösungen ? Bestimmen Sie diese Lösungen !

6 | a) Für welche Werte von k besitzt das inhomogene Gleichungssystem

$kx + y + z = 10$

$x + ky - z = 5$

$x - y + kz = 5$

b1) keine Lösung

b2) mehr als eine Lösung

b3) eine eindeutige Lösung

Berechnen Sie für die Fälle b2) , b3) die Lösung des Gleichungs-systems !

2a) 6 Pkt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 5 \\ 1 & k & -1 & 5 \\ k & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \quad (-1),\ (-k)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 5 \\ 0 & k+1 & -1-k & 0 \\ 0 & k+1 & 1-k^2 & 10-5k \end{array}\right) \quad (-1)$$

1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 5 \\ 0 & k+1 & -(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & 2+k-k^2 & 10-5k \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{(k+1)(2-k)z = 5(2-k)}$$

1

0,5 b1) keine Lösung für $k = -1$ $\quad (0 \cdot z = 15)$

0,5 b2) mehr als eine Lösung für $k = 2$

0,5 b3) eindeutige Lösung für $k \neq -1$ und $k \neq 2$

Fall b2) $k = 2$:

$x - y + 2z = 5 \Rightarrow x = 5 + y - 2z = 5 - z$

$3y - 3z = 0 \Rightarrow y = z$

1 $\boxed{x = 5-t,\ y = t,\ z = t} \Rightarrow \boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 5-t \\ t \\ t \end{pmatrix}}$ $t \in \mathbb{R}$

Fall b3): $\left.\begin{array}{l} k \neq -1 \\ k \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ laut 3. Zeile Gauß $\boxed{z = \frac{5}{k+1}}$ 0,5

2 Zeile Gauß: $(k+1)y - (k+1)z = 0 \Rightarrow \boxed{y = z = \frac{5}{k+1}}$ 0,5

1. Zeile Gauß: $x = 5 + y - kz = 5 + z(1-k)$

$x = 5 + \frac{(1-k)5}{(k+1)} = 5\left[1 + \frac{(1-k)}{(1+k)}\right] = \boxed{x = \frac{10}{1+k}}$ 0,5

Aufgabe 4) 18 Pkt.

a) Bestimmen Sie aus der Gleichung

$$Ae^{j\varphi} = \left[\frac{1+2j}{1-3j}\right]^3$$

die Werte für A und φ. ($A,\ \varphi \in \mathbb{R};\ A > 0$)

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die Lösung sind von

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{2}.$$

BA; 1. Semester
24. 3. 03

4a) 4 Punkte

$$\left(\frac{1+2j}{1-3j}\right)\left(\frac{1+3j}{1+3j}\right) = \frac{(1-6)+j(2+3)}{10} = \boxed{\frac{-1+j}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{j135^\circ}}$$

1 1

$$\left(\frac{1+2j}{1-3j}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot e^{j3\cdot 135^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{8}\cdot e^{j405^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot e^{j(360^\circ+45^\circ)}$$

$$\left(\frac{1+2j}{1-3j}\right)^3 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot e^{j45^\circ} = Ae^{j\varphi}} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{2}/4} \quad \boxed{\varphi = \pi/4}$$

1

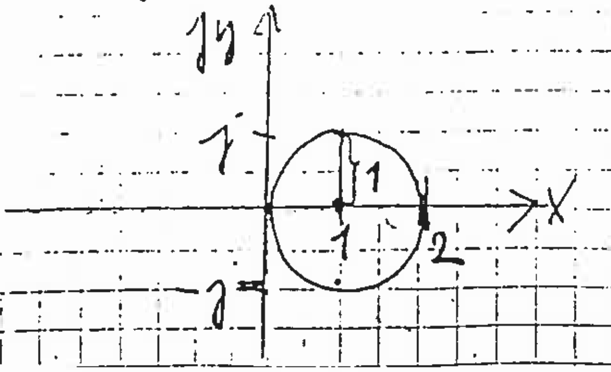
4b) 4 Pkt

$$\frac{1}{z} = \boxed{\frac{1\cdot(x-jy)}{(x+jy)(x-jy)}} = \boxed{\frac{x-jy}{x^2+y^2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

1

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x^2-2x+y^2=0} \Rightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2=1}$$

1 1



$\boxed{\text{Kreis um } z_0 = 1 \text{ mit } r = 1}$ 1

BA Prüfung am 24.3.03; 1. Semester

4c) 3 Pkt.

$$|z+2| = |z-2| \Rightarrow |x+jy+2| = |x+jy-2|$$

$$|(x+2)+jy|^2 = |(x-2)+jy|^2 \Rightarrow (x+2)^2+y^2 = (x-2)^2+y^2 \quad 1$$

$$\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-4x+\cancel{4}+\cancel{y^2} \Rightarrow 8x=0$$

$$\boxed{x=0;\, y\in\mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{z = jy \text{ mit } y \in \mathbb{R}}$$

1 1

4d) 4 Pkt.

$$\left.\begin{aligned} j^{-71} &= \frac{1}{j^{71}} = \frac{1}{j^{(4\cdot 17+3)}} = \frac{1}{j^3} = j \\ j^{-51} &= \frac{1}{j^{51}} = \frac{1}{j^{(4\cdot 12+3)}} = \frac{1}{j^3} = j \end{aligned}\right\} \text{—— } 1$$

$$3\cdot j^{-71} - 11\cdot j^{-51} = 3j - 11j = -8j$$

$$3j^{-71} - 11j^{-51} = 8e^{j180^\circ}\cdot e^{j90^\circ} = 8\cdot e^{j270^\circ} \text{ —— } 1$$

$$W = \sqrt[3]{3j^{-71} - 11j^{-51}} = \sqrt[3]{8e^{j(270^\circ + k360^\circ)}}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j(90^\circ + k120^\circ)} \text{ —— } 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{W_0 = 2e^{j90^\circ} = 2j} \quad \boxed{W_1 = 2\cdot e^{j210^\circ} = -\sqrt{3} - j} \\ &\boxed{W_2 = 2e^{j330^\circ} = \sqrt{3} - j} \end{aligned}\right\} \text{—— } 1$$

4e) 3 Pkt.

$$z(z^4-16)\left(z + \frac{25}{(3+4j)}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{z_1 = 0}$$

3 $$z^4 = 16 \Rightarrow \boxed{z_2 = 2} \quad \boxed{z_3 = -2} \quad \boxed{z_4 = 2j} \quad \boxed{z_5 = -2j}$$

$$z_6 = -\frac{25}{(3+4j)}\cdot\frac{(3-4j)}{(3-4j)} = -\frac{25(3-4j)}{25} = \boxed{-3+4j = z_6}$$

Für jede Nullstelle einen halben Punkt

Name / Vorname: ....

Berufsakademie Stuttgart Staatliche Studienakademie	Ausbildungsbereich: Technik Fachrichtung: Maschinenbau Studienjahrgang: 2001 Studienhalbjahr: 1 Gruppe: 2–4	
Klausur		
Studienfach: Mathematik	Datum: 18.03.2002	
Dozent: Bauer, Schöffler	Bearbeitungszeit: 120 min.	
Hilfsmittel: alle, keine el. Rechner	Punkte:	Note: Signum:
	Angaben dieses Feldes können auf dem 1. Lösungsblatt stehen.	

Aufgabe 1 (25 Minuten)

a) Gegeben sind die Ebenen
(E_1): $x+2y+3z=6$ und (E_2): $3x+2y+z=6$.
Bestimmen Sie eine Gleichung ihrer Schnittgeraden in Parameterform.

b) Die Ebene $x+y+z=0$ und die Gerade $\vec{r}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ schneiden sich im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

c) Berechnen Sie den Ausdruck $A=(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}\times(\vec{i}-\vec{j}))$.

d) Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\2a\\b\end{bmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{bmatrix}a\\b\\b\end{bmatrix}$ mit $a,b\in R$.

Berechnen Sie $\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{v}}$.

e) Gegeben ist die Ebene (E): $-3x+y+2z=7$. Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden, die durch den Ursprung geht und auf E senkrecht steht.

Aufgabe 2 (30 min.)

Gegeben ist die von den Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$ abhängende Ebenenschar

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\b\\2\end{pmatrix},\quad t,s\in\mathbb{R}$$

und der Vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

a) Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit der Vektor $\vec{u}$ senkrecht auf der Ebene E steht? Geben Sie für diesen Fall die Gleichung von E in parameterfreier Form an.

b) Die in a) bestimmte Ebene schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P, Q, R. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte. Bestimmen Sie das Volumen des von den Punkten P, Q, R und O aufgespannten Tetraeders.

c) Die Ebene E soll nun so parallel verschoben werden, so daß der von den Punkten $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ und O gebildete Tetraeder das doppelte Volumen hat wie der unter b) behandelte Tetraeder. Wie lautet die Ebenengleichung dieser Ebene $\tilde{E}$? (Hierbei sind die Punkte $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ die Schnittpunkte der Ebene $\tilde{E}$ mit den Koordinatenachsen)

Aufgabe 3 (25 min)

Hinweis: Die einzelnen Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Welchen Wert haben die folgenden Determinanten (verlangt ist entweder die Berechnung oder eine Begründung für den Wert)

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-2&3&6\\0&2&0&0\\0&4&-1&2\\0&5&1&-3\end{vmatrix}\quad\text{und}\quad D_2=\begin{vmatrix}1&2&4&5\\2&-1&1&3\\0&1&0&2\\-4&2&-2&-6\end{vmatrix}.$$

b) Es sei $\underline{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&2\\0&2&-2\end{bmatrix}$, $\underline{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

Es sei p eine reelle Zahl. Welches lineare Gleichungssystem ergibt sich durch

$\underline{A}\cdot\underline{x} = p\,\underline{x}$?

Liegt ein homogenes oder ein inhomogenes LGS vor?
Für welche Werte von p besitzt das LGS nichttriviale Lösungen?
Geben Sie die Lösung des LGS für den grössten Wert von p an.