Klausur:...Mathematik...
...

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

		Datum:	23.03.2010
Studienbereich:	Technik	**Studienjahrgang:**	2009
Studiengang:	Maschinenbau	**Studienhalbjahr:**	1 Hj
Gruppe:		**Bearbeitungszeit:**	......90...Min.
Dozent:	**Bauer, Baum**		
Hilfsmittel:	Alle,außer elektronische Rechner.............................		
Bewertung:	Punkte: .... von ...... Note:	Signum:	
Student:	....		

Aufgabe 1 (11 Minuten)

Gegeben sind 2 Punkte A(2 / 3 / -1) und B(4 / -3 / 1),die bezüglich einer Ebene E symmetrisch liegen.

a) Geben Sie den jeweiligen Abstand d der Punkte von der Ebene an.
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E in parameterfreier Form.

Aufgabe 2 (6 Minuten)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Von einem Vektor $\vec{b}$ ist die Normalkomponente

$\vec{b} - \vec{b}_a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ bezüglich $\vec{a}$ bekannt.

Für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Aufgabe 3 (18 Minuten)

Gegeben ist die Gerade g in der Form : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h durch den Punkt P(2 / 3 / 2), welche die Gerade g senkrecht schneidet.

Aufgabe 4 (25 Minuten)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3+p \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Für welche Parameterwerte $p \in \Re$ hat das Gleichungssystem
  a1) keine Lösung ?
  a2) unendlich viele Lösungen ? Bestimmen sie diese Lösungen.
  a3) eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

b1) Für welche Werte von p hat das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nichttriviale Lösungen?

b2) Bestimmen Sie diese nichttrivialen Lösungen $\underline{x}$.

Klausur: Mathematik

Aufgabe 5 (20 Minuten)

Drei harmonische gleichfrequente Schwingungen

$$f_1(t) = \sqrt{2}\cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right); \quad f_2(t) = 2\cdot\cos\left(\omega t + \varphi\right); \quad f_3(t) = a\cdot \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

mit a>0 sollen so überlagert werden, daß gilt :

$$f_3(t) - f_1(t) = f_2(t) \quad \text{für alle } t \in \Re$$

Bestimmen Sie die Amplitude a und den Nullphasenwinkel φ

a) rechnerisch

b) zeichnerisch ohne Benutzung der in b) rechnerisch ermittelten Werte.

Aufgabe 6 (10 Minuten)

Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z\cdot(z^4 + z^2 + 1) = 0$$

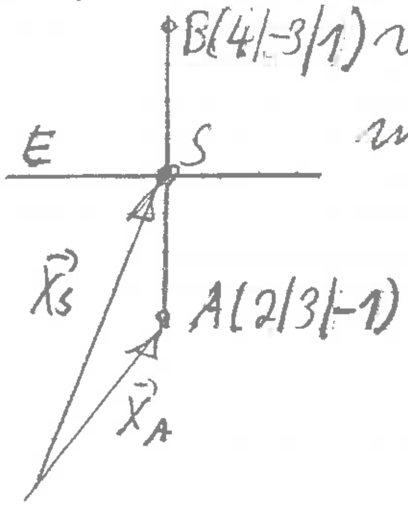
in der Form $z = a + i\cdot b$ und stellen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene dar.

Lösungen zur Klausur vom 23.3.2010, Hj 1

Aufgabe 1a: $|\vec{AB}| = \sqrt{(4-2)^2+(-3-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{44}$

$$\boxed{\text{Abstand der Punkte} = d = \frac{|\vec{AB}|}{2} = \sqrt{11}}$$

Aufgabe 1b: Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n} = t\cdot\vec{AB} = t\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ und Punkt S der Ebene



$$\vec{X_S} = \vec{X_A} + \frac{\vec{AB}}{2}$$

$$\vec{X_S} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

S(3|0|0)

Ebene E: $(\vec{X} - \vec{X_S})\vec{n} = \begin{pmatrix}x-3\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} = 0$

E: $\boxed{x - 3y + z = 3}$

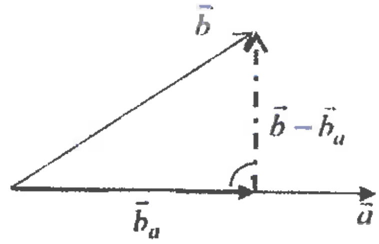
Probe: $d = \left|\left(\frac{x-3y+z-3}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}\right)_A\right| = \left|\frac{2-9-1-3}{\sqrt{11}}\right| = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$

$d = \left|\left(\frac{x-3y+z-3}{\sqrt{11}}\right)_B\right| = \left|\frac{4+9+1-3}{\sqrt{11}}\right| = \sqrt{11}$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Von einem Vektor $\vec{b}$ ist die Normalkomponente

$\vec{b} - \vec{b}_a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ bezüglich $\vec{a}$ bekannt. (siehe Skizze)



Für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

$$\vec{b} = \vec{b}_a + (\vec{b} - \vec{b}_a) \quad \text{laut Skizze.}$$

$$\vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \vec{b} - \vec{b}_a$$

$$\vec{b} = \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \vec{b}}$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} = \vec{s}}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3

1) Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene bestimmen

$$\vec{n} = s \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = s \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Projektion eines beliebigen Ortsvektors $\vec{x}$ der Ebene auf die Richtung der Normalen ergibt $\vec{n}$ ergibt $\vec{N}$

$$\vec{N} = \frac{(\vec{x}_0 \cdot \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{35} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \frac{3 \cdot \cancel{35}}{\cancel{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \vec{N}}$$

---

2 Weg: Schnitt der Geraden $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in Richtung von $\vec{n}$ mit der Ebene E ergibt den Schnittpunkt $S(x_s | y_s | z_s)$ und $\vec{N} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$

$E: \quad 3x - y + 5z = d$

$P(35|0|0): \quad 3 \cdot 35 = d \Rightarrow \boxed{3x - y + 5z = 105}$

$3(3r) - (-r) + 5(5r) = 35r = 105 \Rightarrow r = 3$

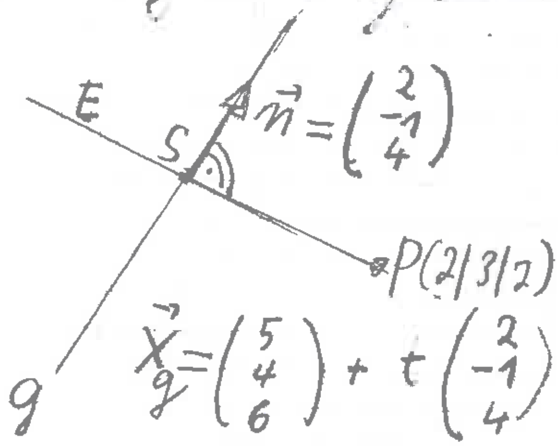
$$\vec{x} = \vec{N} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \vec{N}}$$

Klausur Hj. 1
23.3.2010

Aufgabe 3:

Ebene E, gegeben durch $P(2|3|2)$ und Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ schneidet die Gerade g im Punkt $S(x_s|y_s|z_s)$

Dann Gerade g durch S und P festgelegt



$$\vec{x}_g=\begin{pmatrix}5\\4\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$E:\ (\vec{x}-\vec{x}_p)\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$E:\ \boxed{2x-y+4z=9}$$

Schnitt von Gerade $\vec{x}_g$ mit Ebene E:

$$2(5+2t)-(4-t)+4(6+4t)=9\Rightarrow 21t=-21\Rightarrow t=-1$$

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}5\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{S(3|5|2)}$$

$$h:\ \vec{x}=\vec{x}_p+\lambda\vec{PS}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3-2\\5-3\\2-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}_h=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 4:}}$

Klausur, Hj. 1
23.3.2010

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3+p \\ 2 & 1 & p & 4 \\ 1 & p & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ (-1) \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3+p \\ 0 & -1 & p+2 & -2-2p \\ 0 & p-1 & 2 & -2-p \end{array}\right) (p-1) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3+p \\ 0 & -1 & p+2 & -2-2p \\ 0 & 0 & 2+(p+2)(p-1) & -(2+p)-(2+2p)(p-1) \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & (3+p) \\ 0 & -1 & (p+2) & (-2-2p) \\ 0 & 0 & (p^2+p) & -2p^2-p \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{P(P+1)Z = -P(2P+1)}$$

5a1) für $\boxed{p=-1} \Rightarrow 0 \cdot Z = -1 \Rightarrow$ Widerspruch, also keine Lösung für $p=-1$

5a2) für $\boxed{p=0}$ entfällt die 3. Zeile von der Schlußmatrix von Gauß. Also gibt es nur 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z. Das heißt aber eine Unbekannte, z. Bsp. z kann willkürlich gewählt werden.

Mit $z = t \in \mathbb{R}$ folgt nach Gauß

$$-y + 2z = -2 \Rightarrow y = 2t+2$$

$$x + y - z = 3 \Rightarrow x = 3 - y + z = 3 + t - (2t+2) = 1 - t$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1-t} \quad \boxed{y = 2t+2} \quad \boxed{z = t}$$

5a3) $$Z = -\frac{P(2p+1)}{P(P+1)} = \boxed{-\frac{(2p+1)}{(p+1)} = Z}$$

also eindeutige Lösung für $p \neq 0$ und $p \neq -1$

$$-y + (p+2)z = -2-2p \Rightarrow y = 2(1+p) - (p+2)(2p+1)/(p+1)$$

$$y = \frac{2(1+p)^2 - (p+2)(2p+1)}{(p+1)} = \boxed{\frac{-p}{p+1} = y}$$

$$x = (3+p) - y + z = (3+p) + \frac{(p-2p-1)}{(p+1)} = \boxed{p+2 = x}$$

Fortsetzung von Aufgabe 4

5b1) Bedingung für nichttriviale Lösungen von $\underline{A}\underline{X} = \underline{0}$ ist $\det \underline{A} = 0$

aus 5a) folgt nach Gauß $\det \underline{A}$ als Produkt der Hauptdiagonalglieder,

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & p+2 \\ 0 & 0 & p^2+p \end{vmatrix} = -(p^2+p) = -p(p+1) = 0$$

$$\boxed{\text{Es gilt also nur für } p=0 \text{ und } p=-1 \text{ nichttriviale Lösungen}}$$

5b2) $\underline{A}\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & p+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-y + (p+2)z = 0 \Rightarrow$ mit $\boxed{z = t \in \mathbb{R}}$

$y = (p+2)z \Rightarrow \quad \boxed{y = (p+2)t}$

$x = z - y = t - (p+2)t \Rightarrow$

$\boxed{x = -t(1+p)}$

5b2) $p=0 \Rightarrow x=-t,\ y=2t,\ z=t$

Klausur Hj1
23.3.2010

$$\boxed{\underline{x} = t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ für } p=0}$$

$p=-1 \Rightarrow x=0;\ y=t;\ z=t$

$$\boxed{\underline{x} = t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ für } p=-1}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 1 & p\\1 & p & 1\end{pmatrix};\quad \underline{b} = \begin{pmatrix}3+p\\4\\1\end{pmatrix};\quad \underline{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

a) Für welche Parameterwerte $p \in \Re$ hat das Gleichungssystem
a1) keine Lösung ?
a2) unendlich viele Lösungen ? Bestimmen sie diese Lösungen.
a3) eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

b1) Für welche Werte von p hat das Gleichungssystem $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{0}$ nichttriviale Lösungen?

b2) Bestimmen Sie diese nichttrivialen Lösungen $\underline{x}$.

Aufgabe 5

Mit $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$ folgt

$$f_1(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{4})$$

$$\overbrace{a\cdot\cos(\omega t + \tfrac{3\pi}{4})}^{f_3(t)} - \overbrace{\sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{4})}^{f_1(t)} = \overbrace{2\cos(\omega t + \varphi)}^{f_2(t)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{a e^{j3\pi/4} - \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} = 2e^{j\varphi}}$$

$$a\cdot[\cos\tfrac{3\pi}{4} + j\sin\tfrac{3\pi}{4}] - \sqrt{2}[\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + j\sin(-\tfrac{\pi}{4})] = 2e^{j\varphi}$$

$$a\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2e^{j\varphi}$$

$$a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) - (1-j) = 2e^{j\varphi}$$

$$(-1+j)\left\{\frac{a\sqrt{2}}{2} + 1\right\} = 2e^{j\varphi}$$

Mit $(-1+j) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$ folgt

$$\left\{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + 1\right)\sqrt{2}\right\} e^{j\frac{3\pi}{4}} = 2e^{j\varphi} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{3\pi}{4}} \qquad (a + \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2 - \sqrt{2} = 0{,}586}$$

Klausur H, 1
23.3.2010

Fortsetzung von Aufgabe 5

2. Lösungsweg (kürzer)

$$a e^{j3\pi/4} - \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} = a e^{j\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2}\, e^{j\pi} \cdot e^{-j\pi/4} = 2 e^{j\varphi}$$

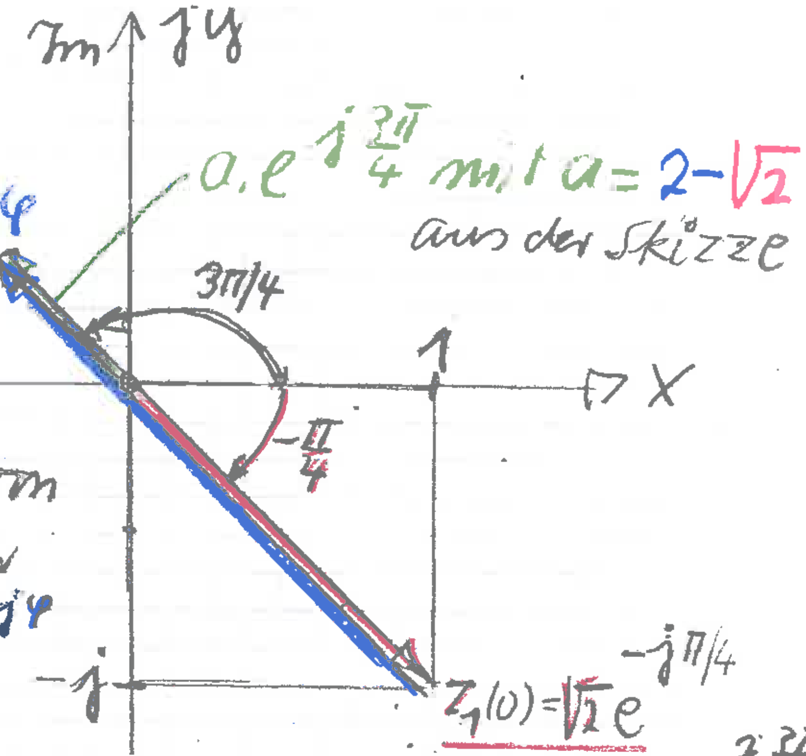
$$= a e^{j3\pi/4} + \sqrt{2}\, e^{j3\pi/4} = (a+\sqrt{2})\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$(a+\sqrt{2})\, e^{j3\pi/4} = 2 e^{j\varphi} \Rightarrow a+\sqrt{2} = 2$$

$$\boxed{a = 2-\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}}$$

Zeichnerische Lösung:

$$\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} + 2 e^{j\varphi} = a e^{j\frac{3\pi}{4}}$$



An die Spitze von $Z_1(0)$ wird der Zeiger $Z_2(0) = 2e^{j\varphi}$ der Länge 2 angesetzt. Da $Z_1(0) + Z_2(0)$ den Zeiger $a e^{j\frac{3\pi}{4}}$ ergeben soll, muß $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ sein. Aus der Skizze liest man ab: $a = 2-\sqrt{2}$

Klausur Hj1
23.3.2010

2 Weg (umständlicher) $\boxed{\text{Aufgabe 5}}$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+1\right)(-1+j) = 2\cdot e^{j\varphi} \Rightarrow$$

$$\left|\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+1\right)(-1+j)\right| = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2} = \left|\sqrt{2}e^{j\varphi}\right| = \sqrt{2}$$

$$a+\sqrt{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2-\sqrt{2} = 0{,}586}$$

$$\left\{\underbrace{(2-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}+1\right\}(-1+j) = 2e^{j\varphi}$$

$$\left\{\sqrt{2}-1+1\right\}(-1+j) = \sqrt{2}(-1+j) = 2e^{j\varphi} =$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 2e^{j\varphi} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{3\pi}{4}}$$

---

3 Weg: $\left(-\frac{a}{2}\sqrt{2}-1\right)+j\left(1+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = 2(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) \\ \cos\varphi &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\tan\varphi = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4},\ \boxed{\varphi_2 = \varphi_1+\pi = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2-\frac{2}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}}$$

Für $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ folgt $a<0$ im Widerspruch zur Annahme

Aufgabe 6 : $z(z^4+z^2+1)=0 \Rightarrow \boxed{z_1=0}$

$z^4+z^2+1=0 \Rightarrow$ mit $w=z^2 \Rightarrow w^2+w+1=0$

$$w_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{w_1=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot e^{j\varphi_1}}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} \Rightarrow \varphi_1 = (-60^\circ+180^\circ) = 120^\circ \hat{=} \frac{2\pi}{3}$$

$$z_{2/3} = \sqrt{w_1} = e^{j\left(\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)\frac{1}{2}} = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_2 &= e^{j\pi/3} = \cos 60^\circ + j\sin 60^\circ = \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 &= e^{j4\pi/3} = \cos 240^\circ + j\sin 240^\circ = -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

$$w_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{j4\pi/3} \Rightarrow$$

$$z_{4/5} = \sqrt{w_2} = e^{j\left(\frac{4\pi}{3}+k2\pi\right)\frac{1}{2}} = e^{j\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_4 &= e^{j2\pi/3} = \cos 120^\circ + j\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_5 &= e^{j5\pi/3} = \cos 300^\circ + j\sin 300^\circ = \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$