BERUFSAKADEMIE STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach: Mathematik

Klausur

Datum: 22.03.06

Ausbildungsbereich: Technik **Studienjahrgang:** 2005

Fachrichtung: Maschinenbau **Studienhalbjahr:** 1

Gruppe: .... **Bearbeitungszeit:** 90 min.

Dozent: Bauer, Baum, Schäffler

Hilfsmittel: alle, außer elektr. Rechner

Bewertung: Punkte: .... Note: .... Signum: ....

Student: ....

Aufgabe 1 **(10 min.)**

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^6 - z^3 + 1 = 0$$

und stellen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene dar.

Aufgabe 2 **(30 Minuten)**

2.1 In dieser Aufgabe bezeichnet $\bullet$ das Skalarprodukt zweier Vektoren.

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ definiert?

a1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ a2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a}$ a3) $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{a}$ a4) $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \times \vec{a}$

b) Berechnen Sie diejenigen Ausdrücke aus Aufgabenteil a), die definiert sind, für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (30 Minuten)

4.1 Gegeben ist die Ortskurve

$$z(t) = \frac{2j}{\cos t + j \cdot \sin t} \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Zeichnen Sie die Kurve, markieren Sie den Kurvenpunkt für $t = 0$ und den Durchlaufsinn der Kurve.

4.2 Wie ist φ zu wählen, damit die komplexe Gleichung

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{1-j} e^{j \cdot \varphi}$$

eine Lösung auf der negativen imaginären Achse hat?

4.3 Gegeben sind die harmonischen Schwingungen

$$x_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3})$$

$$x_2(t) = 2\sqrt{3} \cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6})$$

$$x_3(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}) \qquad (a > 0)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe komplexer Zeiger den Wert für a, für den die Überlagerung $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ eine Sinus-Schwingung der Gestalt

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

mit $A > 0$ ergibt. Welchen Wert hat dann A ? Lösen Sie diese Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch.

2.2 Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Volumen V des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats (in Abhängigkeit vom Winkel φ).

b) Geben Sie alle Werte $\varphi \in [0; 2\pi]$ an, für die V maximal wird.

2.3 Gegeben ist die Ebene E1: $2x - y + 3z - 1 = 0$

a) Bestimmen Sie k so, dass der Punkt $P(-1/k/1)$ in dieser Ebene liegt.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E2, die im Punkt P senkrecht auf E1 steht und die den Punkt $Q(2/1/-2)$ enthält, in der Gestalt $ax + by + cz + d = 0$.

Aufgabe 3 (20 Minuten)

3.1 Berechnen Sie $\underline{A} \cdot \underline{A}^T - \underline{A}^T \cdot \underline{A}$ für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2 Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Für welchen Wert von p ist $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = p \cdot \underline{x}$?

b) Berechnen Sie für das in a) gefundene p alle Lösungen des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = p \cdot \underline{x}$.

3.3 a) Geben Sie die (4,4)-Matrix $\underline{A}$ an, für welche

$$a_{ik} = \begin{cases} i^2 & \text{für } i = k \\ (-1)^{i+k} & \text{für } i < k \\ i - k & \text{für } i = k+1 \\ 0 & \text{für } i > k+1 \end{cases} \quad ; \quad i = 1,\dots,4 \,;\, k = 1,\dots,4$$

gilt.

b) Berechnen Sie für die Elemente aus a) den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{3} a_{i+1,\,4-i}$.

Musterlösungen Mathematik 1

22.03.06

Aufgabe 1 (10 min.)

$$z^6 - z^3 + 1 = 0$$

SUB: $u = z^3 \Rightarrow u^2 - u + 1 = 0$

(1) (1) $u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

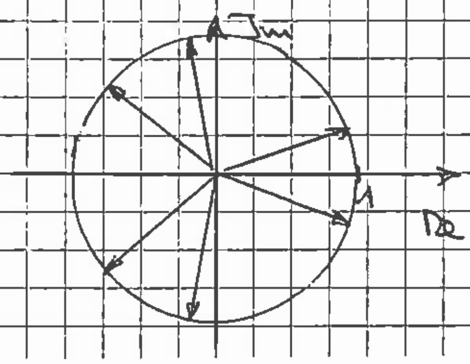
(1) $\Rightarrow z_1^3 = e^{j60°}$ $\qquad z_2^3 = e^{-j60°}$

(2)

$z_{11} = e^{j20°}$ $\qquad z_{21} = e^{-j20°}$

$z_{12} = e^{j140°}$ $\qquad z_{22} = e^{j100°}$

$z_{13} = e^{j260°}$ $\qquad z_{23} = e^{j220°}$



$\Sigma: 5$

Gesamtpunktzahl 43

Vorschlag: 40 P. $\longrightarrow$ 1,0

20 P. $\longrightarrow$ 4,0

Aufgabe 2 (30 Minuten)

2.1 In dieser Aufgabe bezeichnet $\bullet$ das Skalarprodukt zweier Vektoren.

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ definiert?
a1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ a2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a}$ a3) $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{a}$ a4) $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \times \vec{a}$

b) Berechnen Sie diejenigen Ausdrücke aus Aufgabenteil a), die definiert sind, für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) a3) und a4) nicht definiert ✓

b) a1) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ ✓✓

$= \underline{3\vec{b}}$, da $\vec{a} \perp \vec{b}$

a2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ $(\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a})$ ✓ ④

2.2 Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Volumen V des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats (in Abhängigkeit vom Winkel φ).

b) Geben Sie alle Werte $\varphi \in [0; 2\pi]$ an, für die V maximal wird.

a) $V = |[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]| = \left| \begin{vmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-\sin\varphi| = \underline{|\sin\varphi|}$ ✓✓

b) V maximal für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$ ✓

③

2.3 Gegeben ist die Ebene E1: $2x - y + 3z - 1 = 0$

a) Bestimmen Sie k so, dass der Punkt $P(-1/k/1)$ in dieser Ebene liegt.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E2, die im Punkt P senkrecht auf E1 steht und die den Punkt $Q(2/1/-2)$ enthält, in der Gestalt $ax + by + cz + d = 0$.

a) Koordinaten von P in E_1: $-2 - K + 3 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{K = 0}$ ✓ ⑦

b) $P(-1|0|1)$, $Q(2|1|-2)$; Normalenvektor von E_1: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓✓✓

E_2 aufgespannt von $\vec{n_1}$ und $\vec{b} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$: Mit $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ✓

E_2: $[(\vec{x} - \vec{x_0})\ \vec{n_1}\ \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 15y + 5(z-1) = 0$ ✓✓

E_2: $15y + 5z - 5 = 0$ Σ: 14

Aufgabe 3 (20Minuten)

3.1 Berechnen Sie $\underline{A}\cdot\underline{A}^T - \underline{A}^T\cdot\underline{A}$ für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & -1 \\ \underline{A}\cdot\underline{A}^T & & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 7 & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 2 \\ \underline{A}^T\underline{A} & & -1 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 20 \end{array}$$

$$\underline{\underline{A}\cdot\underline{A}^T - \underline{A}^T\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}}$$ ✓✓✓ 3

3.2 Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Für welchen Wert von p ist $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems $\underline{A}\cdot\underline{x} = p\cdot\underline{x}$?

b) Berechnen Sie für das in a) gefundene p alle Lösungen des Gleichungssystems $\underline{A}\cdot\underline{x} = p\cdot\underline{x}$.

a) $\underline{A}\cdot\underline{x} = p\underline{x} \Leftrightarrow (\underline{A} - p\underline{E})\cdot\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} -1-p & 1 & -1 \\ -2 & -4-p & 2 \\ -1 & -1 & -1-p \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -1-p+2-3=0 \Rightarrow \underline{p=-2}$$ ✓✓

b) $p=-2$; $\underline{A} - p\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$(\underline{A}+2\underline{E})\cdot\underline{x} = \underline{0}$: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 = s-t$, $x_2 = t$, $x_3 = s$ ✓✓ 4

3.3 a) Geben Sie die (4,4)-Matrix $\underline{A}$ an, für welche

$$a_{ik} = \begin{Bmatrix} i^2 & \textit{für} & i = k \\ (-1)^{i+k} & \textit{für} & i < k \\ i-k & \textit{für} & i = k+1 \\ 0 & \textit{für} & i > k+1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad i = 1,\dots,4\,;\ k = 1,\dots,4$$

gilt.

b) Berechnen Sie für die Elemente aus a) den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{3} a_{i+1,4-i}$.

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ ✓✓

b) $\sum_{i=0}^{3} a_{i+1,4-i} = -1$ ✓

3

Σ: 10

Aufgabe 4 **(30 Minuten)**

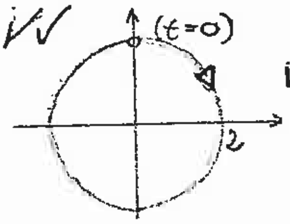
4.1 Gegeben ist die Ortskurve

$$z(t) = \frac{2j}{\cos t + j \cdot \sin t} \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Zeichnen Sie die Kurve, markieren Sie den Kurvenpunkt für $t = 0$ und den Durchlaufsinn der Kurve.

$z(x) = x(t) + jy(t) = \frac{2j}{\cos t + j\sin t} = 2j \frac{\cos t - j\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} =$ ✓✓

$= 2\sin t + j 2\cos t \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = 4}$ ✓



✓ ④

4.2 Wie ist φ zu wählen, damit die komplexe Gleichung

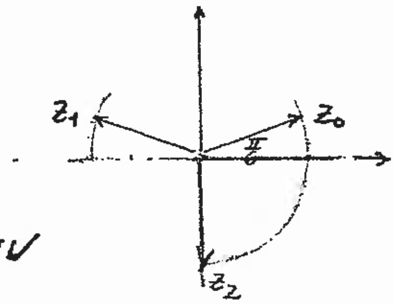
$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{1-j} e^{j \cdot \varphi}$$

eine Lösung auf der negativen imaginären Achse hat?

$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}} e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + \frac{\pi}{4})}$

$z_0 = e^{j\frac{\pi}{6}} = e^{j\frac{\varphi + \frac{\pi}{4}}{3}}$ für $\underline{\varphi = \frac{\pi}{4}}$ ✓✓✓

$z_1 = e^{j\frac{5}{6}\pi}$, $\underline{z_2 = e^{j\frac{3}{2}\pi} = -j}$



③

4.3 Gegeben sind die harmonischen Schwingungen

$$x_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3})$$

$$x_2(t) = 2\sqrt{3}\cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6})$$

$$x_3(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}) \qquad (a > 0)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe komplexer Zeiger den Wert für a, für den die Überlagerung $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ eine Sinus-Schwingung der Gestalt

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

mit $A > 0$ ergibt. Welchen Wert hat dann A ? Lösen Sie diese Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch.

$z_{10} = 2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3})$

$z_{20} = 2\sqrt{3}\, e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} - j\sin\frac{\pi}{6})$ ✓

$z_{30} = a \cdot e^{-j\frac{3}{4}\pi} = a(\cos\frac{3}{4}\pi - j\sin\frac{3}{4}\pi)$

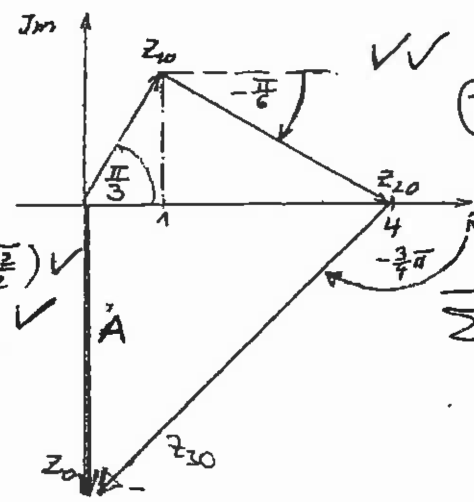
$z_0 = z_{10} + z_{20} + z_{30}$

$= 2(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j) + a(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})$ ✓

$= 4 - \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2}\, j \overset{!}{=} Ae^{-j\frac{\pi}{2}} = -Aj$ ✓

$\Rightarrow 4 - \frac{a}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \underline{a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}}$ ✓

$\underline{A = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 4}$ ✓



✓✓ ⑦

Σ: 14