BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach:...Mathematik...................

Klausur

Datum:
20.03.2007..........

Ausbildungsbereich:	Technik	**Studienjahrgang:**	2006.....
Studiengang:	Maschinenbau	**Studienhalbjahr:**	1.HJ....
Gruppe:	....	**Bearbeitungszeit:**	90 Minuten....
Dozent:	Bauer,W., Bauer,B.,Baum,Schäffler.......		
Hilfsmittel:	Alle,außer elektronische Rechner		
Bewertung:	Punkte:	Note:	Signum: ....
Student:	....		

Aufgabe 1 (25 Minuten)

Eine Ebenenschar E_k mit $k \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch folgende Gleichung:

$E_k: \quad k \cdot x + (8-k)\,y + 8z - 4 = 0$

Die Gerade g hat die Gleichung

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie k so, dass die Gerade g senkrecht zu der Ebenenschar E_k ist.

b) Zeigen Sie, dass g für keinen Wert k in E_k enthalten ist.

c) Für welche Werte von k beträgt der Winkel zwischen g und E_k gerade $\varphi = 30^\circ$

d) Für welche Werte von k beträgt der Abstand D des Ursprunges P (0/0/0) von der Ebene E_k gerade $\frac{1}{8}\sqrt{8}$.

Klausur am 20.03.2007, 1.HJ

Aufgabe 2 (20 Minuten)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$x + 2y - z = 0$$
$$y + 2z = 0$$

$$2x + 3y + pz = q$$

Für welche Parameterwerte p, q hat das Gleichungssystem

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) eine eindeutige Lösung

Für die Fälle b) und c) sind die Lösungen anzugeben.

Aufgabe 3 (10 Minuten)

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $\underline{A}\,(\underline{A} - 2\underline{E})$, wobei $\underline{E}$ die (3,3) Einheitsmatrix ist.

b) Benützen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a), um die zu $\underline{A}$ inverse Matrix A^{-1} zu bestimmen

Aufgabe 4 (20 Minuten)

a) Skizzieren Sie die Kurve in der komplexen Zahlenebene, welche durch die Gleichung

$|z + 2j| = |z - 2|$ beschrieben wird.

Dabei gilt $z = x + j \cdot y$.

b) Gegeben ist die Gleichung $(j - 1)\, z^k = 8\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$

b1) Für welches $k \in \mathbb{N}$ liegen die Lösungen der Gleichung aus c) auf einem Kreis vom Radius 2

b2) Berechnen Sie die Lösungen für k=3

Aufgabe 5 (15 Minuten)

Durch Überlagerung der beiden gleichfrequenten Schwingungen $f_1(t) = -\sqrt{2}\sin(2t - \frac{3\pi}{4})$ und $f_2(t) = 2\cos(2t + \varphi)$ erhält man eine resultierende Schwingung der Form $f(t) = A\cos(\omega \cdot t)$, so dass gilt:

$$A\cos(\omega \cdot t) = -\sqrt{2}\sin(2t - \frac{3\pi}{4}) + 2\cos(2t + \varphi)$$

a) Geben Sie den Zahlenwert für ω an.

b) Bestimmen Sie die Amplitude $A > 0$ und den Nullphasenwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ mit Hilfe komplexer Zeiger.

b1) rechnerisch

b2) zeichnerisch, ohne Benutzung der in b1) rechnerisch ermittelten Werte von A und φ.

Eine Ebenenschar E_k mit $k \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch folgende Gleic[illegible]g:

E_k: $k\,x + (8-k)\,y + 8z - 4 = 0$

Die Gerade g hat die Gleichung

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

BA-Klausur, Hj.1
20.3.07

5) a) Bestimmen Sie k so, dass die Gerade g senkrecht zu der Ebenenschar E_k ist.

5) b) Zeigen Sie, dass g für keinen Wert k in E_k enthalten ist.

4) c) Für welche Werte von k beträgt der Winkel zwischen g und E_k gerade $\varphi = 30°$

3) d) Für welche Werte von k beträgt der Abstand D des Ursprunges P (0/0/0) von der Ebene E_k gerade $\frac{1}{8}\sqrt{8}$.

1a) Wenn g senkrecht zu E_k sein soll, müssen der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E_k parallel sein

$$\begin{pmatrix}k\\8-k\\8\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad (3)$$

$k = \lambda \Rightarrow k = \lambda = 4$

$8-k = \lambda \Rightarrow k = 8-\lambda = 4$

$8 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 4$

Also gilt $\boxed{\text{Für } k = 4 \text{ gilt } g \perp E_k}$ (2)

1b) Wenn g in E_k enthalten wäre, wären der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E_k senkrecht aufeinander und ihr Skalarprodukt müßte 0 ergeben (3)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\8-k\\8\end{pmatrix} = k + 8 - k + 16 = 24 \neq 0 \quad (2)$$

$\boxed{\text{g ist in } E_k \text{ nicht enthalten}}$

1c) Für den Winkel zwischen der Geraden g mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_k = \begin{pmatrix}k\\8-k\\8\end{pmatrix}$ der Ebene E_k gilt

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}_k|}{|\vec{a}|\,|\vec{n}_k|} \quad \text{mit } 0 \le \varphi \le 90°} \quad (1)$$

(1)

$$\sin 30° = \frac{|k + 8 - k + 16|}{\sqrt{k^2 + (8-k)^2 + 64}\cdot\sqrt{6}} = \boxed{\frac{24}{\sqrt{(2k^2 - 16k + 128)\,6}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{48}{2\sqrt{3(k^2 - 8k + 64)}} = 1 \Rightarrow k^2 - 8k - 128 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}k_1 = -8\\ k_2 = 16\end{matrix}} \quad (2)$$

1d) Hesse'sche Normalform von E_k: (1)

$$\boxed{D = \left|\frac{k x + (8-k) y + 8z - 4}{\sqrt{k^2 + (8-k^2) + 64}}\right|_{x=y=z=0}} = \frac{4}{\sqrt{2k^2 - 16k + 128}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

$$\frac{32}{\sqrt{16k^2 - 8\cdot 16k + 8\cdot 128}} = \frac{32}{4\sqrt{k^2 - 8k + 64}} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{k^2 - 8k + 64}}} = 1$$

$$k^2 - 8k + 64 = 64 \Rightarrow k(k-8) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}k_1 = 0\\ k_2 = 8\end{matrix}} \quad (2)$$

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$x + 2y - z = 0$
$y + 2z = 0$

$2x + 3y + pz = q$

Für welche Parameterwerte p, q hat das Gleichungssystem

4) a) keine Lösung

5) b) unendlich viele Lösungen

5) c) eine eindeutige Lösung

Für die Fälle b) und c) sind die Lösungen anzugeben.

BA-Klausur, Hj 1
20.3.07

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & p & q \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+2 & q \end{array}\right] \xrightarrow{(1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (p+4) & (q \end{array}\right] \quad 2 \Longrightarrow (p+4)z = q \Longrightarrow$$

$q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

a) keine Lösung für $p = -4$ und ~~$q \neq 1$~~ 2

b) unendlich viele Lösungen für $p = -4$ und $q = 0$

2

- 4 -

Zeile 2: $y + 2z = 0$ } 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, also

Zeile 1: $x + 2y - z = 0$ } eine Unbekannte frei wählbar:

$\boxed{z = t \Rightarrow y = -2t \;\|\; x = t - 2(-2t) = 5t}$

$$\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 5t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad 3$$

c) eindeutige Lösung: $z = \dfrac{q}{(p+4)}$

$\boxed{\text{für } p \neq -4 \text{ und } q \in \mathbb{R}}$ 2

Zeile 2: $y = -2z = \dfrac{-2(q)}{(p+4)} =$

Zeile 1: $x = z - 2y = \dfrac{q}{(p+4)} - 2\cancel{q} = \dfrac{5q}{p+4}$

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{5q}{p+4} \\ -\dfrac{2q}{p+4} \\ \dfrac{q}{p+4} \end{bmatrix} \quad 3$$

BA Klausur, Hj 1
20.3.2007

<u>Aufgabe 3</u> (10 Minuten) $\hat{=}$ 7 Pkt

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) a) Berechnen Sie $\underline{A}\,(\underline{A} - 2\underline{E})$, wobei $\underline{E}$ die (3,3) Einheitsmatrix ist.

5) b) Benützen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a), um die zu $\underline{A}$ inverse Matrix A^{-1} zu bestimmen

$$\begin{array}{c|c|c} & (\underline{A}-2\underline{E}) & \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \underline{A} & \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \end{array} \quad \boxed{\underline{A}\cdot(\underline{A}-2\underline{E})}$$

2

$$\underline{A}\cdot(\underline{A}-2\underline{E}) = 3\underline{E} \Rightarrow \underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot(\underline{A}-2\underline{E}) = 3\underline{A}^{-1}\cdot\underline{E} \Rightarrow$$

$$\underline{E}\cdot(\underline{A}-2\underline{E}) = 3\underline{A}^{-1}\cdot\underline{E} \Rightarrow \underline{A}-2\underline{E} = 3\underline{A}^{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{3}(\underline{A}-2\underline{E}) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow 5$$

-6-

-7-

20.3.2007

Aufgabe 4 (20 Minuten) $\hat{=}$ 14 Pkt.

6) a) Skizzieren Sie die Kurve in der komplexen Zahlenebene, welche durch die Gleichung

$|z + 2j| = |z - 2|$ beschrieben wird

Dabei gilt $z = x + j\cdot y$

8) b) Gegeben ist die Gleichung $(j-1)z^k = 8\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$

b1) Für welches $k \in \mathbb{N}$ liegen die Lösungen der Gleichung aus c) auf einem Kreis vom Radius 2

b2) Berechnen Sie die Lösungen für k=3

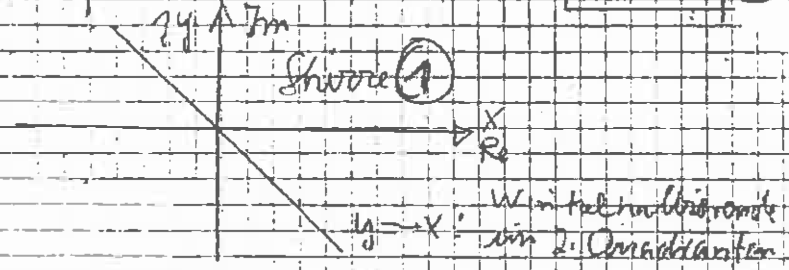
4a) $z+2j = x + j(y+2) \Rightarrow \boxed{|z+2j| = \sqrt{x^2+(y+2)^2}}$ (1)

$z-2 = (x-2)+jy \Rightarrow \boxed{|z-2| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}}$ (1)

$|z-2| = |z+2j| \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}}$ (1)

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4} = \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} \Rightarrow \boxed{y = -x}$ (2)

Skizze (1)



-8-

4b) $(j-1)z^k = 8\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$, mit $-1+j = \sqrt{2}\,e^{j\frac{3\pi}{4}}$

b1) $\boxed{z^k = \frac{8\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}\,e^{j3\pi/4}} = 8e^{-j\pi} = 8e^{j\pi} = -8}$ (2)

$\boxed{z_n = \sqrt[k]{8}\,e^{j\frac{(\pi+n\cdot 2\pi)}{k}}, \text{ mit } n = 0,1,2,\ldots(k-1)}$ (2)

$|z_n| = r = \sqrt[k]{8} = 2 \Rightarrow \boxed{k=3}$ (1)

b2) $z_n = \sqrt[3]{8}\,e^{j\left(\frac{\pi+n\cdot 2\pi}{3}\right)} = 2e^{j\frac{\pi(1+2n)}{3}}$

$z_0 = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$	$z_1 = 2e^{j\pi} = -2$	$z_2 = 2e^{j\frac{5\pi}{3}}$
(1)	(1)	(1)

BA-Klausur, Hj 1
20.3.2007

Aufgabe 5) (15 Minuten) $\hat{=}$ 10 pkt.

Durch Überlagerung der beiden gleichfrequenten Schwingungen

$f_1(t) = -\sqrt{2}\sin(2t - \frac{3\pi}{4})$ und $f_2(t) = 2\cos(2t + \varphi)$ erhält man eine resultierende Schwingung der Form $f(t) = A\cos(\omega \cdot t)$, so dass gilt:

$$A\cos(\omega \cdot t) = -\sqrt{2}\sin(2t - \frac{3\pi}{4}) + 2\cos(2t + \varphi)$$

1) a) Geben Sie den Zahlenwert für ω an.

b) Bestimmen Sie die Amplitude A > 0 und den Nullphasenwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ mit Hilfe komplexer Zeiger.

6) b1) rechnerisch

3) b2) zeichnerisch, ohne Benutzung der in b1) rechnerisch ermittelten Werte von A und φ.

5a) $\omega = 2$, da die Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen die Frequenz erhalten bleibt (1)

5b1) Mit $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ folgt

$$-\sqrt{2}\sin(2t - \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(2t - \frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{A\cos(2t) = \sqrt{2}\cdot\cos(2t - \frac{\pi}{4}) + 2\cos(2t + \varphi)} \quad (1)$$

$$\boxed{Ae^{j0} = A = \sqrt{2}\cdot e^{-j\pi/4} + 2e^{j\varphi}} \quad (1)$$

$$A = \sqrt{2}\left\{\cos(-\frac{\pi}{4}) + j\sin(-\frac{\pi}{4})\right\} + 2\left\{\cos\varphi + j\sin\varphi\right\}$$

$$A = \sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} + 2\left\{\cos\varphi + j\sin\varphi\right\}$$

$$\boxed{A = (1 - j) + 2\{\cos\varphi + j\sin\varphi\} = (1 + 2\cos\varphi) + j(2\sin\varphi - 1)} \quad (2)$$

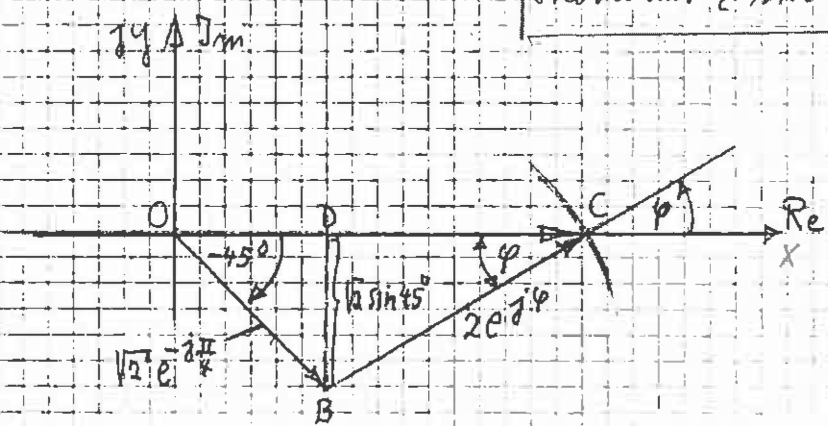
1) $2\sin\varphi - 1 = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}\right)$ $\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{6}}$ (1)

2) $A = 1 + 2\cos\varphi = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{6}) = \boxed{1 + \sqrt{3} = 2{,}732 = A}$ (1)

$\varphi_2 = 5\pi/6$ entfällt, weil $A = 1 + 2\cos(\frac{5\pi}{6}) = (1 - \sqrt{3}) < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung negativ wäre.

5b2) Zeichnerische Lösung

Skizze mit φ und A (3)



1) Konstruktion: Im Endpunkt B vom Zeiger $\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ Kreis mit $r = 2$, welcher die x-Achse im Punkt C schneidet. Dann $\overline{OC} = A \approx 2{,}7$ und $\varphi = 30°$ aus der Skizze ablesen.

2) Rechnung mittels Skizze: $\overline{BD} = \sqrt{2}\sin 45° = 1$

Aus ΔCBD: $\sin\varphi = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 30°}$

$\overline{DC} = 2\cos\varphi = 2\cos 30° = \sqrt{3}$; $\overline{OD} = \sqrt{2}\cos 45° = 1$

$\overline{OC} = A = \overline{OD} + \overline{DC} = \boxed{1 + \sqrt{3} = A}$